Application du théorème des restes chinois

N. Lygeros

Equations : $N \equiv 1\ [2]$, $N \equiv 2\ [3]$, … , $N \equiv 9\ [10]$, $N \equiv 0\ [11]$
Solution minimale : 2519

Liste 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 $\Rightarrow$ Liste utile : 4, 7, 9, 10, 11 $\Rightarrow$ $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = M$

Equations : $\begin{cases} N \equiv 3\ [4] \\ N \equiv 6\ [7] \\ N \equiv 8\ [9] \\ N \equiv 9\ [10] \\ N \equiv 0\ [11] \end{cases} \Rightarrow N \equiv X\ [M]$ **X : unique** via le théorème des restes chinois

Vérification [10] : $9 \equiv 4\ [5] \equiv 1\ [2]$
[9] : $8 \equiv 2\ [3]$

Idée : $N \equiv -1\ [2]$ $\quad N \equiv -1\ [3] \quad \overset{?}{\Rightarrow} \quad N \equiv -1\ [6]$
$2\alpha - 1 \quad 3\beta - 1 \quad 6\gamma - 1$

Unique solution via l'unicité qui provient du théorème des restes chinois.

$\left[\begin{array}{l} N \equiv -1\ [4\cdot7\cdot9\cdot10] \\ N \equiv 0\ [11] \end{array}\right.$ $\quad (4\cdot7\cdot9\cdot10) = K - 1$
$11\,L$

Minimisation $\Rightarrow K = 1$ $\Rightarrow$ or $4\cdot7\cdot9\cdot10 - 1 = 2519$ est divisible par 11.

Solution : $(4\cdot7\cdot9\cdot10 - 1)\quad [M]$

En réalité, nous exploitons le lemme suivant qui est un corollaire du théorème des restes chinois.

Lemme : Soit un ensemble de congruences de la forme $N \equiv A\ [M_i]$
avec $M_i \wedge M_j = 1$ alors N est de la forme :

$$N \equiv A \quad \left[\prod M_i\right]$$

Preuve : N vérifie trivialement l'ensemble des congruences. Comme la solution est Unique via le théorème des restes chinois, N est solution unique.