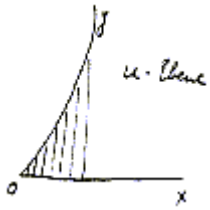
Göttingen, den 26. September 1913

Hochverehrter Herr Geheimrat,

Es ist mir leider ausser Blaschke niemand mehr eingefallen, der für die Redaktion von B$^{\underline{d}}$ III in Betracht kommen könnte.
Ihre Frage über den Fundamentalbereich habe ich mir allerdings nur im Falle von loxodromischen oder elliptischen Anfangsgliedern überlegt; sie scheint mir, wenn ich mich nicht grob geirrt haben sollte, ganz elementarer Natur zu sein.

Es sei in einer u-Ebene eine analytische Kurve gegeben, die mit der x-Axe einen $\neq 0$ verschiedenen Winkel macht und auf diese durch die Gleichung

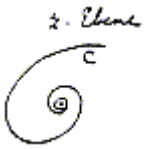
$$y = a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots \tag{1}$$



Punktweise bezogen ist; a_1 darf also nicht reell und positiv sein. Es soll eine mehrdeutige Funktion

$$u = f(z) \tag{2}$$

gefunden werden mit folgenden Eigenschaften:
a) durch einen Zweig von $f(z)$ wird die x-Axe der u-Ebene auf eine Kurve ab-gebildet, die durch den Punkt $z = 0$ geht



b) die längs der Kurve C aufgeschnittene z-Ebene wird durch diesen Zweig von $f(z)$ eineindeutig auf das schraffierte Stück der u-Ebene abgebildet

c)die Bilder von zwei entspechenden Punkten der x und y-Kurve in der u-Ebene fallen mit einem und demselben Punkte von C zusammen.

(Natürlich gibt es immer unendlich viele Funktionen, die diese Eigenschaften haben).

I. Sind $a_2 = a_3 = \ldots = 0$, so genügt es

$$u = z^m \qquad e^{2\pi i m} = a_1$$

zu setzen.

II. Im loxodromischen Falle $|a_1| \neq 1$ mache man den Ansatz

$$u = z^m + c_2\, z^{2m} + c_3\, z^{3m} + \ldots .$$

wo m dieselbe Bedeutung hat wie oben. Ich setze zur Abkürzung

$$z^m = v \qquad u = v + c_2\, v^2 + \ldots = \phi(v)$$

und die gegeben Funktion

$$a_1\, u + a_2\, u^2 + \ldots = \psi(u). \tag{3}$$

Bei einem Umlauf von z um $z = 0$ geht v in $a_1\, v$ über, zugleich muss u in $\psi(u)$ übergehen; man muss also $c_2, c_3 \ldots$ so bestimmen, dass

$$\psi(u) = \phi(a_1\, v). \tag{4}$$

Die Gleichung (4) erlaubt die Koeffizienten $c_2, c_3 \ldots$ zu berechnen; man erhält z.B.

$$\begin{cases} \left(a_1{}^2 - a_1\right) c_2 = a_2 \\ \left(a_1{}^3 - a_1\right) c_3 = a_3 + 2\, a_2\, c_2 \\ \left(a_1{}^4 - a_1\right) c_4 = a_4 + 3\, a_3\, c_2 + a_2 \left(2\, c_3 + c_2{}^2\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ich habe mir allerdings nur sehr flüchtig die Konvergenz der so erhaltenen Reihe überlegt; sie scheint mir aber ziemlich sicher zu sein.

Die Funktion $u = \phi\left(z^m\right)$ liefert dann Alles, was man wünscht; man kann mit Hülfe von Cauchyschen Integralen zeigen, dass die aufgeschnittene z-Ebene eineindeutig auf den schraffierten Teil der u-Ebene abgebildet wird (für hinreichend Kleine $|z|$).

III. Im Falle $|a_1| = 1$ wird die obige Rechnung illusorisch, da $\left|a_1^n - a_1\right|$ nicht oberhalb einer festen Grenze bleibt; man muss daher von einer Kurve

$$y = \rho\, a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots, \qquad \rho > 1$$

ausgehen und einen Grenzübergang machen; im Falle $a_1 = \pm 1$ müsste man ähnlich vorgehen. Ich will mir noch alle diese Sachen genauer durchdenken.

Mit bestem Gruss
Ihr ergebener
C. Carathéodory