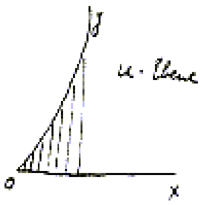
Υπολογιστικές παρατηρήσεις περί επιστολής Carathéodory προς Klein
(Cod. Ms. F. Klein 8, 463)

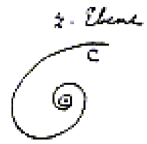
Ν. Λυγερός

Το γράμμα που έστειλε ο Carathéodory στον Klein από τη Γοττίγγη στις 26 Σεπτ.1913 αναφέρεται στη θεμελιώδη περιοχή (Fundamentalbereich). Ο Carathéodory απαντά στην ερώτηση του Kleinστην περίπτωση λοξοδρομικών και ελλειπτικών αρχικών μελών. Παίρνει μία αναλυτική συνάρτηση που σχηματίζει με τον x-άξονα μία γωνία $\neq 0$ και αναζητά μία πολυσήμαντη συνάρτηση $u = f(z)$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:



u-επίπεδο

α) Μέσω ενός κλάδου της $f(z)$ απεικονίζεται ο x-άξονας του u-επιπέδου επί μιας καμπύλης η οποία διέρχεται δια του σημείου $z = 0$.
β) Το κατά μήκος της καμπύλης C τεμνόμενο z-επίπεδο απεικονίζεται μέσω αυτού του κλάδου της $f(z)$ αμφιμονοσήμαντα επί του σκιαγραφημένου τμήματος του u-επιπέδου.
γ) Οι εικόνες δύο αντίστοιχων σημείων της x και y-καμπύλης στο u-επίπεδο συμπίπτουν με ένα και το αυτό σημείο της C.



z-επίπεδο

Ο Carathéodory παρατηρεί πρώτα ότι υπάρχουν άπειρες σε πλήθος συναρτήσεις που έχουν τις ιδιότητες αυτές, πράγμα το οποίο είναι προφανές με τη χρήση μετασχηματισμού. Μετά αναλύει τρεις περιπτώσεις. Όπως η πρώτη είναι εκφυλισμένη, ας εξετάσουμε τα βήματά του περί της δεύτερης δηλαδή τη λοξοδρομική περίπτωση $|a_1| \neq 1$.

Θέτει $u = z^m + c_2 z^{2m} + c_3 z^{3m} + ..., v = z^m$, $v = z^m$ και $\varphi(v) = u = v + c_2 v^2 + ...$

Η $\psi(u) = a_1 u + a_2 u^2 + ...$ είναι η δοθείσα συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας την εξής ιδέα: σε μια τροχιά του z γύρω από το $z = 0$ μεταβαίνει το v στο $a_1 v$ και συγχρόνως πρέπει να μεταβεί το u στο $\psi(u)$, καταλήγει στην εξίσωση : $\psi(u) = \varphi(a_1, v)$, η οποία επιτρέπει τον υπολογισμό των συντελεστών $c_2, c_3 ....$

$$\begin{cases} \left(a_1^2 - a_1\right)c_2 = a_2 \\ \left(a_1^3 - a_1\right)c_3 = a_3 + 2a_2c_2 \\ \left(a_1^4 - a_1\right)c_4 = a_4 + 3a_3c_2 + a_2(2c_3 + c_2^2) \end{cases}$$

Επιβεβαιώνουμε τους υπολογισμούς του Carathéodory και μέσω υπολογιστή με την ανώτερη γλώσσα MAPLE:

```
c[1]:=1:  # εξ ορισμού
psi:=x→sum(a[i]*x^i,i=1..10):  # περιορισμένο ανάπτυγμα της ψ
phi:=x→sum(c[i]*x^i,i=1..10):  # περιορισμένο ανάπτυγμα της φ
t:=taylor(psi(phi(v)),v,7):  # περιορισμένο ανάπτυγμα του  Taylor
co:=collect(taylor(phi(a[1]*v)-t,v,7),v):  # συλλογή των συντελεστών
solve({seq(coeff(co,v,7),v),v,j),j=2..6)},{seq(c[i],i=2..6)});  # πρώτες λύσεις
```

$$c_2 = \frac{a_2}{a_1^2 - a_1},\ c_3 = \frac{a_1^2 a_3 + 2a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^3 - a_1}$$

Μπορούμε επιπλέον να επιβεβαιώσουμε και την ιδέα του όσον αφορά στη σύγκλιση της σειράς. O Carathéodory γράφει:
«Ich habe mir allerdings nur sehr flüchtig die Konvergenz der so erhaltenenReihe überlegt ; sie s cheint mir aber ziemlich sicher zu sein.» και είναι υπολογιστικά ορθός.

In German : http://www.lygeros.org/1587b-Cara-Klein.pdf