**Έλεγχος των υπολογισμών της επιστολής Carathéodory προς Herglotz (Cod. Ms. G. Herglotz F 18, 6)**

Ν. Λυγερός

***Δεδομένα***

Η τροχιά του πλανήτη: $x_i = x_i(t) \qquad \dot{x}_i = \dfrac{dx_i}{dt}$ (1)

O Carathéodory θέτει: $r^2 = x_i\ x_i$ , $s^2 = \dot{x}_i\ \dot{x}_i$ και $w = x_i\ \dot{x}_i$ (2)

Και με τις διαφορικές εξισώσεις: $\ddot{x}_i = -\dfrac{f\, x_i}{r^3}$ (2α)

βρίσκει $r\,\dot{r} = w$ , $s\,\dot{s} = -\dfrac{f\,w}{r^3}$ , $\dot{w} = s^2 - \dfrac{f}{r}$ και $\ddot{w} = -\dfrac{f\,w}{r^3}$ (3)

- Έχοντας $r^2 = x_i\ x_i$ , $\dot{\overline{r^2}} = \dot{\overline{(x_i\ x_i)}}$ δηλαδή $2\,r\,\dot{r} = 2\,x_i\,\dot{x}_i$ άρα $r\,\dot{r} = w$ (3α)
- Έχοντας $s^2 = \dot{x}_i\ \dot{x}_i$ , $\dot{\overline{s^2}} = \dot{\overline{(\dot{x}_i\ \dot{x}_i)}}$ δηλαδή $2\,s\,\dot{s} = 2\,\dot{x}_i\,\ddot{x}_i$ ή
  $s\,\dot{s} = -\dfrac{\dot{x}_i\ f\ x_i}{r^3}$ άρα $s\,\dot{s} = -\dfrac{f\ w}{r^3}$ (3β)
- Έχοντας $w = x_i\ \dot{x}_i$ , $\dot{w} = \dot{\overline{(x_i\ \dot{x}_i)}} = \dot{x}_i\ \dot{x}_i + x_i\ \ddot{x}_i = s^2 - \dfrac{x_i\ f\ x_i}{r^3} = s^2 - \dfrac{f}{r}$ (3γ)
- Έχοντας $\dot{w} = s^2 - \dfrac{f}{r}$ , $\ddot{w} = 2\,\dot{s}\,s + \dfrac{f\,\dot{r}}{r^2} = -\dfrac{2\,f\,w}{r^3} + \dfrac{f\,\dot{r}\,r}{r^3} = -\dfrac{2\,f\,w}{r^3} + \dfrac{f\,w}{r^3}$ (3δ)

Συνεπώς $s\,\dot{s} - \ddot{w} = 0$ , $x_i\,\ddot{w} - \ddot{x}_i\,w = 0$ και $x_i\,\ddot{x}_j - x_j\,\ddot{x}_i = 0$

Με ολοκλήρωση των εξισώσεων έχει:

$\int (s\,\dot{s} - \ddot{w})\,dt = \dfrac{s^2}{2} - \dot{w} = h$ (4) (h σταθερά)

$\int (x_i\,\ddot{w} - \ddot{x}_i\,w)\,dt = x_i\,\dot{w} - \dot{x}_i\,w = F_i$ (5)

$\int (x_i\,\ddot{x}_j - x_j\,\ddot{x}_i)\,dt = x_i\,\dot{x}_j - x_j\,\dot{x}_i = A_{ij}$ (6)

Κατά συνέπεια:

$$F_i\ x_i = (x_i\ \dot{w} - \dot{x}_i\ w)\,x_i = x_i\ x_i\ \dot{w} - w\,\dot{x}_i\ x_i = r^2\ \dot{w} - w^2$$

και $F_i\ \dot{x}_i = (x_i\ \dot{w} - \dot{x}_i\ w)\,\dot{x}_i = x_i\ \dot{x}_i\ \dot{w} - \dot{x}_i\ \dot{x}_i\ w = w\,\dot{w} - s^2\ w$

$$F_i\ \dot{x}_i = \left( s^2\ w - \frac{f\ w}{r} \right) - s^2\ w = -\frac{f\ w}{r} \qquad (7)$$

$$F^2 = F_i\ F_i = \left(x_i\ \dot{w} - \dot{x}_i\ w\right)^2 = \left(x_i\ \dot{w}\right)^2 + \left(\dot{x}_i\ w\right)^2 - 2\ x_i\ \dot{x}_i\ w\ \dot{w}$$

$$F_i\ F_i = r^2\ \dot{w}^2 + s^2\ w^2 - 2\ w^2\ \dot{w}$$

$$F_i\ F_i = r^2\ \dot{w}^2 + w^2\ \dot{w} + w^2 \cdot \frac{f}{r} - 2\ w^2\ \dot{w} = \left(r^2\ \dot{w} - w^2\right)\dot{w} + \frac{f\ w^2}{r} \qquad (8)$$

Αν $F = 0$ τότε $\begin{cases} w = 0 \\ \dot{w} = 0 \end{cases}$ διότι $F^2 \geq 0$ και $F^2 = \left(r^2\ \dot{w} - w^2\right)\dot{w} + \dfrac{f\ w^2}{r}$

Επίσης έχουμε και $\dot{w} = s^2 - \dfrac{f}{r} = 0$ και $\dfrac{s^2}{2} - \dot{w} = h$ άρα $s^2 = \dfrac{f}{r} = 2\ h$

Αν $F > 0$, ο Carathéodory θέτει $F\ G_i = A_{ji}\ F_j$

$$A_{ji}\ F_j = \left(x_j\ \dot{x}_i - x_i\ \dot{x}_j\right)\left(x_j\ \dot{w} - \dot{x}_j\ w\right)$$

$$A_{ji}\ F_j = x_j\ x_j\ \dot{x}_i\ \dot{w} + x_i\ \dot{x}_j\ \dot{x}_j\ w - x_j\ \dot{x}_i\ \dot{x}_j\ w - x_i\ \dot{x}_j\ x_j\ \dot{w}$$

$$A_{ji}\ F_j = r^2\ \dot{x}_i\ \dot{w} + x_i\ w\ s^2 - \dot{x}_i\ w^2 - x_i\ w\ \dot{w}$$

$$A_{ji}\ F_j = r^2\ \dot{x}_i\ \dot{w} - w^2\ \dot{x}_i + x_i\ w\ s^2 - x_i\ w\ s^2 + \frac{f}{r}\ w\ x_i$$

$$A_{ji}\ F_j = \frac{f\ w}{r}\ x_i + \left(r^2\ \dot{w} - w^2\right)\dot{x}_i \qquad (9)$$

Επιπλεόν: $F^2\ x_i = \dfrac{f\ w^2}{r}\ x_i + \left(r^2\ \dot{w} - w^2\right)x_i\ \dot{w}$ λόγω (8)

$F\ w\ G_i = \dfrac{f\ w^2}{r}\ x_i + \left(r^2\ \dot{w} - w^2\right)\dot{x}_i\ w$ λόγω (9)

Άρα μέσω της (5) μετά από αφαίρεση έχουμε:
$F^2\ x_i = \left(r^2\ \dot{w} - w^2\right)F_i + F\ w \cdot G_i$ (10α)
Με τον ίδιο τρόπο αλλά με πολλαπλασιασμό με το $\dot{w}$ και το $\dot{x}_i$ έχουμε πάλι μέσω της (5) $F^2\ \dot{x}_i = -\dfrac{f\ w}{r}\ F_i + F\ \dot{w} \cdot G_i$. (10β)
όπως $F\ G_i = A_{ji}\ F_j$, έχουμε $F\ F_i\ G_i = A_{ji}\ F_i\ F_j$ και πολλαπλασιάζοντας τη (10α) με $\dot{x}_i$ και τη (10β) με x, βρίσκουμε $F\ F_i\ G_i = -A_{ji}\ F_i\ F_j$ άρα $F\ F_i\ G_i = 0$ (11).

Πολλαπλασιάζοντας τη (10α) με τη (10β) μέσω της ιδιότητας $F\ F_i\ G_i = 0$
έχουμε $F^2\ F^2\ w = \left(r^2\ \dot{w} - w^2\right)F^2\left(-\dfrac{f\ w}{r}\right) + F^2\ w\ \dot{w}\ G^2$

$$F^2 = \left(r^2\ \dot{w} - w^2\right)\left(-\frac{f}{r}\right) + \dot{w}\, G^2$$

και ξέρουμε ότι: $F^2 = \left(r^2\ \dot{w} - w^2\right)\dot{w} + \dfrac{f\ w^2}{r}$

άρα : $\left(r^2\ \dot{w} - w^2\right)\dot{w} + \dfrac{f\ w^2}{r} + f\ r\ \dot{w} - \dfrac{w^2\ f}{r} = \dot{w}\, G^2$

και τελικά: $G^2 = f\ r + \left(r^2\ \dot{w} - w^2\right)$ (11)

Με τις εξισώσεις $\dfrac{s^2}{2} - \dot{w} = h$ και $\dot{w} = s^2 - \dfrac{f}{r}$

βρίσκουμε $\dfrac{\dot{w}}{2} + \dfrac{f}{2\,r} - \dot{w} = h = \dfrac{f}{2\,r} - \dfrac{\dot{w}}{2}$ άρα $2\,h = \dfrac{f}{r} - \dot{w}$ (11α)

Με την εξίσωση: $F^2 = \left(r^2\ \dot{w} - w^2\right)\dot{w} + \dfrac{f\ w^2}{r}$ και την (11) μέσω της (11α)

έχουμε:

$$F^2 + 2\,h\,G^2 = \left(r^2\ \dot{w} - w^2\right)\dot{w} + \frac{f\ w^2}{r} + f\ r\left(\frac{f}{r} - \dot{w}\right) + \left(r^2\ \dot{w} - w^2\right)\frac{f}{r} - \left(r^2\ \dot{w} - w^2\right)\dot{w}$$

$$F^2 + 2\,h\,G^2 = f^2 \qquad (12)$$

Τώρα, αν $G > 0$, με την περιστροφή του συστήματος συντεταγμένων έτσι ώστε $F_1 = F$ και $G_2 = G$ έχουμε: $x_1 = r\cos v$ και $x_2 = r\sin v$

Άρα $F\ r\cos v = F\ x_1 = r^2\ \dot{w} - w^2 = G^2 - f\ r$

και $F\ r\sin v = F\ x_2$

Πολλαπλασιάζοντας με $F\,G_i$ την εξίσωση (10) έχουμε επιπλέον μέσω της $F\ F_i\ G_i = 0$ (11)

$F^2\ x_i\ F\ G_i = F \cdot w\,G_i\ F\ G_i$ άρα $F\ x_i = w\,G_i$

Συνεπώς $F\ x_2 = G\ w$ και όπως $w = r\ \dot{r}$
βρίσκουμε τελικά:

$$r = \frac{G^2}{f + F\ \cos v} \qquad \text{και} \qquad \dot{r} = \frac{F\ \sin v}{G}$$