

# Ανάλυση μιας αρμονικής ιδέας του Carathéodory

N. Λυγερός

Στην επιστολή του προς τον D. Hilbert (Cod. Ms. D. Hilbert 55, 5), ο Carathéodory σε σχέση με τον νόμο του Kirchoff εξετάζει την εξής ιδέα:

Αν η  $f(x)$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[0, 2\pi]$  και  $\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| < 1$  τότε προκύπτει από τον

μηδενισμό των  $n$  πρώτων συντελεστών Fourier της  $f(x)$  ότι σε ολόκληρο το διάστημα η απόλυτη τιμή της  $f(x)$  είναι φραγμένη από ένα όριο που τείνει προς το μηδέν. Όπως το εξηγεί και ο ίδιος, αν αρκεσθεί κανείς σε μια περιορισμένη ακρίβεια, τότε προκύπτει από τον μηδενισμό των  $n$  πρώτων συντελεστών Fourier, ο μηδενισμός της συνάρτησης.

Ο πρώτος συντελεστής του Fourier είναι ο εξής:  $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$

Όπως μηδενίζεται από τις αρχικές συνθήκες έχουμε  $a_0 = 0$ .

Όμως μέσω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει, αν η  $f$  είναι συνεχής, ένα σημείο  $c$  του διαστήματος  $]a, b[$  έτσι ώστε να ισχύει:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Και κατά συνέπεια:  $f(c) = 0$ .

Η πρώτη συνθήκη είναι:  $\left| \frac{f(c) - f(0)}{c} \right| < 1 \Leftrightarrow |f(c) - f(0)| < |c|$  άρα  $|f(0)| < |c|$

Και έχουμε επίσης:  $\left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \right| < 1$  άρα  $|f(c+h)| < |h|$  και  $|f(2\pi)| < |2\pi - c|$

Συνεπώς σε όλο το διάστημα  $f(x) < \max\{c, 2\pi - c\}$

Μέσω του θεωρήματος του Fourier έχουμε:  $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt, n \in \mathbb{Z}$

Συνεπώς:  $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt$  και  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt, n \in \mathbb{N}^*$

Πράγμα το οποίο μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός γενικού φράγματος σε ολόκληρο το διάστημα. Πρέπει όμως να επισημάνουμε -αν και δεν έχουμε δει ακόμα το πρωτότυπο της επιστολής- ότι δεν είναι απαραίτητο να έχει δώσει μια αναλυτική μορφή του φράγματος. Εξετάζουμε αυτό το θέμα διότι λείπουν κάποια στοιχεία από διάτρηση του χαρτιού. Η σκέψη μας λοιπόν είναι η εξής: Ο Carathéodory διευκρινίζει στον Hilbert ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$  πράγμα το

οποίο θα ήταν αυτονόητο αν είχε γράψει ένα τύπο ανάλογο με αυτόν που βρήκε

ο Hellinger δηλαδή  $M_n < \frac{1}{n^{3/2}}$ . Επιπλέον όπως

το βλέπουμε και στη συνέχεια της επιστολής, ο Carathéodory αποδεικνύει το «θεώρημα» μέσω μιας επαγωγής εις άτοπο που δεν χρειάζεται κανένα τύπο εφόσον του αρκεί η εξής ιδιότητα:

$|f_n(x)| \geq$  του σταθερού αριθμού  $a > 0$

Συνεπώς μπορούμε να εικάσουμε με σχετική σιγουριά ότι ο Carathéodory έγραψε απλώς  $|f(x)| \leq M_n$  στο σημείο που δεν διαβάζεται, πράγμα το οποίο του επιτρέπει να μην εξετάσει την ειδική περίπτωση.