Παίγνιο γραφής του Carathéodory

(Cod. Ms. D. Hilbert 55, 7)

Ν. Λυγερός

O Carathéodory αναλύει στον Hilbert το θεώρημα του Gauss μέσω ενός παιγνίου γραφής. Με αυτόν τον τρόπο εννοούμε υπολογισμούς δίχως υπολογισμούς. Κατά κάποιο τρόπο είναι μια συμβολική ερμηνεία οπτικών μαθηματικών.

u_1, u_2, u_3, u_4 : στοιχεία μιας στάσιμης κατανομής ταχύτητας

$x_k\left(a_1, a_2, a_3, a_4, t\right) \quad (k = 1, 2, 3, 4)$: γραμμές ροής

$V(t) = \int \sqrt{g}\, \frac{\partial\left(x_1\ x_2\ x_3\ x_4\right)}{\partial\left(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\right)} da_1\ da_2\ da_3\ da_4$: τυχών όγκος υγρού

Η παραγώγιση του $V(t)$ σε σχέση με τον χρόνο t μάς δίνει τον εξής τύπο:

$$\dot{V}(t) = \int \left\{ \sqrt{g}\, \frac{\overset{\bullet}{\partial\left(x_1\ x_2\ x_3\ x_4\right)}}{\partial\left(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\right)} \right\} da_1\ da_2\ da_3\ da_4$$

$$\dot{V}(t) = \int \left\{ \overset{\bullet}{\sqrt{g}}\, \frac{\partial\left(x_1\ x_2\ x_3\ x_4\right)}{\partial\left(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\right)} + \sqrt{g}\, \left\{ \frac{\overset{\bullet}{\partial\left(x_1\ x_2\ x_3\ x_4\right)}}{\partial\left(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\right)} \right\} \right\} da_1\ da_2\ da_3\ da_4$$

$$\dot{V}(t) = \int \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial\left(x_1\ x_2\ x_3\ x_4\right)}{\partial\left(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\right)} \displaystyle\sum_{k=1} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_k} u_k \\ + \sqrt{g}\, \left\{ \dfrac{\partial\left(u_1\ x_2\ x_3\ x_4\right)}{\partial\left(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\right)} + \dfrac{\partial\left(x_1\ u_2\ x_3\ x_4\right)}{\partial\left(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\right)} \overset{\bullet}{+} \dfrac{\partial\left(x_1\ x_2\ u_3\ x_4\right)}{\partial\left(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\right)} + \dfrac{\partial\left(x_1\ x_2\ x_3\ u_4\right)}{\partial\left(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\right)} \right\} \end{array} \right\} da_1\ da_2\ da_3\ da_4$$

Μέσω της παραγοντοποίησης του συντελεστή $\dfrac{\partial\left(x_1\ x_2\ x_3\ x_4\right)}{\partial\left(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\right)}$ και του τύπου

$$\frac{\partial\left(u_i \displaystyle\prod_{j \neq i} x_j \right)}{\partial\left(\displaystyle\prod_k a_k \right)} \prod_k da_k \quad = \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \prod_k dx_k$$

έχουμε την εξής μορφή :

$$\dot{V}(t)=\int\left\{\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x_k}u_k+\sqrt{g}\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right\}dx_1\ dx_2\ dx_3\ dx_4$$

Παρατηρώντας ότι το αποτέλεσμα μεταξύ των αγκυλών είναι η συνέπεια μιας παραγοντοποίησης ενός γινομένου, έχουμε τελικά :

$$\dot{V}(t)=\int\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial\sqrt{g}\,u_k}{\partial x_k}\,d\omega$$

όπου $d\omega$ είναι ο στοιχειώδης όγκος ή ογκίσκος.
Επιπλέον ο Carathéodory προσθέτει ότι ο υπολογισμός του $\dot{V}(t)$ μπορεί να γίνει και μέσω της ροής δια της επιφάνειας, οπότε :

$$\dot{V}(t)=\int_{\text{επιφάνεια}}\sqrt{g}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \frac{\partial x_1}{\partial\alpha} & \frac{\partial x_2}{\partial\alpha} & \frac{\partial x_3}{\partial\alpha} & \frac{\partial x_4}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial x_1}{\partial\beta} & \frac{\partial x_2}{\partial\beta} & \frac{\partial x_3}{\partial\beta} & \frac{\partial x_4}{\partial\beta} \\ \frac{\partial x_1}{\partial\gamma} & \frac{\partial x_2}{\partial\gamma} & \frac{\partial x_3}{\partial\gamma} & \frac{\partial x_4}{\partial\gamma} \end{vmatrix}d\alpha\ d\beta\ d\gamma$$