Η κομψότητα του μαθηματικού τεχνάσματος του Carathéodory (Cod., Ms. F. Klein 22A, Blatt 8)

Ν. Λυγερός

Σε ερώτηση του Klein σχετικά μ' ένα πρόβλημα ουράνιας μηχανικής,
ο Carathéodory εισαγάγει έναν τρόπο επίλυσης που είναι ιδιαίτερα κομψός για εκείνη την εποχή. Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιεί κανονικές μεταβλητές με τον εξής τρόπο. Όλο του το μαθηματικό τέχνασμα βασίζεται στο πλαίσιο που ανέπτυξε ο Hamilton.
Έχουμε n σώματα και οι συντεταγμένες τους στο διάστημα είναι του τύπου $x_1, x_2, ..., x_{3n}$ διότι κάθε σώμα έχει τρεις συντεταγμένες. Και για τη συμμετρία του τύπου, ο Carathéodory κάνει χρήση του τεχνάσματος του τριπλασιασμού της μάζας. Με άλλα λόγια θέτει
ότι $m_1 = m_2 = m_3, m_4 = m_5 = m_6 =, ...$ εφόσον κάθε τριάδα συντεταγμένων αντιπροσωπεύει το ίδιο σώμα. Οι ορμές καθορίζονται με τον κλασικό τρόπο: $y_k = m_k x_k$.

Ο Carathéodory ορίζει ότι:

$$H = \sum \frac{y_k^2}{2m_k} + \sum \left(\frac{-m_1 m_4}{r_{14}} + \frac{-m_1 m_8}{r_{18}} + ... \right)$$

Αν και δεν υπάρχει διαφορά εφόσον $m_{3k+1} = m_{3k+2}$, πρέπει να επισημάνουμε ότι θα ήταν πιο σωστό με τα δεδομένα του τεχνάσματος να γράψουμε:

$$H = \sum \frac{y_k^2}{2m_k} + \sum \left(\frac{-m_1 m_4}{r_{14}} + \frac{-m_1 m_7}{r_{17}} + ... \right)$$

Τότε βρίσκει ότι: $\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}$ και $\dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}$

Με αυτούς τους δύο τύπους είναι απλό να αποδείξει ότι $\dot{H} = -\frac{\partial H}{\partial t}$ και συνεπώς $\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0$

διότι έχουμε: $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x_t} . \frac{\partial x_t}{\partial t} = -\dot{y}_k \dot{x}_k$

και: $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial y_t} . \frac{\partial y_t}{\partial t} = -\dot{x}_k \dot{y}_k$

Με βάση την αρχή του Hamilton, έχουμε γενικότερα για ένα διαφορικό σύστημα του τύπου $m_i \ \ddot{x}_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_N, t)(i = 1, 2, ..., N)$. Και αν το σύστημα έχει ένα δυναμικό τύπου $u(x_1, x_2, ..., x_N, t)$, τότε $f_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}(i = 1, 2, ..., N)$. Άρα ο Carathéodory χρησιμοποιεί μία ειδική περίπτωση αυτής της ιδέας για να βρει: $\dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}$

Διότι το δυναμικό υπάρχει εφόσον: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$.

Συνεπώς ο Carathéodory για να εξασφαλίσει μια σύντομη απόδειξη της πρότασης της ενέργειας εκμεταλλεύεται αποτελεσματικά μέσω της πυκνότητάς της, τη συνάρτηση του Hamilton και τις κανονικές μεταβλητές. Η μέθοδος δεν είναι πρωτότυπη μα είναι εύστοχη για την επίλυση της ερώτησης του Klein. Και το τυπογραφικό λάθος στους δείκτες των μαζών δεν αλλάζει την ουσία της.

Πάντως η παραπομπή του Klein πάνω στην επιστολή του Καραθεοδωρή επιβεβαιώνει με την αναφορά στην παλιά εισήγηση του Hamel ότι η απάντηση του Καραθεοδωρή έλυσε οριστικά το πρόβλημά του.