Liens entre les algèbres de Lie et les hyperstructures

N. Lygeros

Une hyperstructure $(R,+,\bullet)$ est appelée H_v-anneau si les hyperopérations (+) et $(\bullet)$ sont faiblement associatives, si l'axiome de reproduction est respecté par (+) et si $(\bullet)$ est faiblement distributive par rapport à (+). Alors la relation fondamentale $\gamma*$ est la plus petite équivalence telle que $R/\gamma*$ soit un anneau. Et un H_v-anneau $(F,+,\bullet)$ est appelé H_v-corps si le quotient $F/\gamma*$ est un corps.

La généralisation de Vougiouklis des algèbres de Lie consiste à effectuer la procédure suivante. On considère $(L,+)$ un h/v-espace vectoriel sur le h/v-corps $(F,+,\bullet)$. On prend la carte canonique $\varphi: \ F \to F/\gamma*$ et on note $\omega_0 = \{x \in F : \varphi(x) = 0\}$ où 0 est l'élément zéro du corps fondamental $F/\gamma*$ De manière analogue, on note ω_L le noyau de la carte canonique $\varphi': \ L \to L/\varepsilon*$ et on considère l'hyperopération du crochet de Lie. Alors L est une h/v-algèbre de Lie sur F si nous avons les axiomes suivants : l'hyperopération crochet de Lie est hyper-bilinéaire, en d'autres termes on a :

(1) $[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 , y] \cap (\lambda_1 [x_1 , y] + \lambda_2 [x_2 , y]) \neq \varnothing$ pour tous $\mathrm{x}, \mathrm{x}_1, x_2, y, y_1, y_2 \in L$ et $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in F$

(2) $[x,x] \cap \omega_L \neq \varnothing$ pour tout $x \in L$

(3) $([x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]]) \cap \omega_L \neq \varnothing$ pour tous $x, y, z \in L$.

Via cette généralisation des algèbres de Lie, on obtient un lien naturel avec les hypergroupes faiblement commutatifs et les H_v-groupes faiblement commutatifs puisque ces derniers représentent des restrictions de la notion d'hyperanneau. De plus comme les algèbres de Lie peuvent apparaître à partir d'algèbres associatives, cette généralisation permet de poursuivre l'association de ces structures via la faible associativité des hyperstructures. Cela donc engendre un ensemble de schémas mentaux cohérent puisque l'intersection non vide, s'appuie cette fois d'une part sur la relation fondamentale qui est elle-même une généralisation uniforme et d'autre part sur l'identité de Jacobi. Nous retrouvons ainsi une mentalité que nous avons appliquée aux loops de Moufang pour générer à partir de l'identité de Moufang, les hypergroupes de Moufang-Marty et les hypergroupes généralisés de Marty-Moufang. Seulement ici nous avons une intervention non triviale du noyau.

Cet ensemble de définitions donne donc de manière indirecte du poids à l'étude structurelle des hyperstructures faiblement commutatives. Car dans ce nouveau cadre l'étude de la faible commutativité représente via sa relation avec la faible associativité, une étape importante dans la compréhension de cette série de généralisations.