De Picard à Carathéodory via Landau

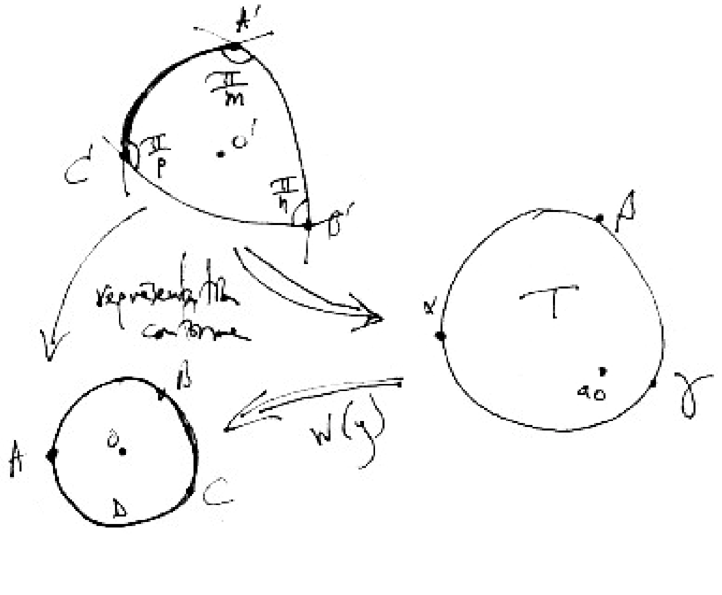
N. Lygeros

Grâce au théorème classique de Picard, nous savons que toute fonction entière – qui n'est pas constante – prend au moins une fois l'une des valeurs zéro ou un. Ce théorème a été généralisé par Landau en 1904 de la manière suivante :

Soit une fonction analytique : $G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m + \ldots$ régulière en $x = 0$, pour laquelle $a_1 \neq 0$. Il existe un cercle $|x| < R = R(a_0, a_1)$ dont le rayon dépend seulement de a_0 et a_1, à l'intérieur duquel la fonction $G(x)$ possède un point singulier ou prend au moins une fois l'une des valeurs zéro et un.

En 1905, Carathéodory a lui aussi généralisé ce second théorème, ouvrant une nouvelle voie dans le domaine car cette fois l'approche quantitative et non seulement qualitative est possible. Il considère une série de puissances représentant aux environs de l'origine une fonction qui ne possède pas d'autres singularités que des pôles à l'intérieur d'un cercle de rayon 1. Soient α, β, γ trois nombres complexes quelconques différents de a_0 et m, n, p trois entiers positifs tels que l'inégalité $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1$ soit vérifiée. Il suppose, en outre, que les fonctions $(y - \alpha)^{\frac{1}{m}}$, $(y - \beta)^{\frac{1}{n}}$ et $(y - \gamma)^{\frac{1}{p}}$ sont régulières aux environs de toute valeur de x dont le module est inférieur à l'unité et à laquelle correspond une valeur finie de y. Alors, la valeur absolue du coefficient a_1 sera au plus égale à une quantité, qui dépend des seules grandeurs $a_0, \alpha, \beta, \gamma, m, n, p$.

Pour démontrer ce résultat, Carathéodory exploite à merveille les propriétés de la représentation conforme.



Sur cette figure, la condition imposée à m, n et p s'explique naturellement puisque $\frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{p} < \pi$.
Le triangle curviligne ne peut être dégénéré.

La fonction $w(y)$ est le quotient de deux fonctions hypergéométriques.

D'après Carathéodory, via l'étude de Schwarz, une branche de cette fonction $w(y)$ s'annule pour $y = a_0$ et possède en ce point une dérivée $w'(a_0)$ finie et différente de zéro.

Comme le maximum de $\left|\frac{w[f(x)]}{x}\right|$ n'est atteint que sur la circonférence pour laquelle $|x| = 1$ et $|w[f(x)]| \leq 1$, Carathéodory pose $|w[f(x)]| \leq |x|$. De cela, il tire trivialement $\left|\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = |w'(a_0)\, a_1| \leq 1$ et donc $|a_1| \leq \left|\frac{1}{w'(a_0)}\right|$.

De plus en considérant la fonction inverse de $w(y)$, il montre aisément que la limite obtenue est vraiment la limite supérieure de $|a_1|$.

Le procédé est tout à fait remarquable puisque malgré l'absence de calculs, il permet de concrétiser la théorie des fonctions à variable complexe. Via la représentation conforme, Carathéodory absorbe le théorème de Landau comme un cas particulier mais pas seulement. En effet son approche permet d'accéder à d'autres résultats comme le fait que la fonction initiale ne prendra jamais la valeur b pour toutes les valeurs de $|x| < \lambda$, où b est un point différent de a_0 et λ le minimum de la distance des points des branches de la fonction $w(y)$. Son approche permet aussi de généraliser le théorème de Boutroux pour les fonctions holomorphes évitant les valeurs zéro et un. De plus, s'il remplace la fonction $w(y)$ par une fonction automorphe fuchsienne, il peut étendre son résultat même avec un nombre de points singuliers plus grand que trois.

Le caractère remarquable de son résultat est souligné par Landau lui-même dans son article aux Annales scientifiques de l'E.N.S (1907) puisqu'il écrit ceci :
« En 1906 j'ai publié un Mémoire plus étendu ; il rend compte des résultats remarquables trouvés récemment par MM. Hurwitz, Schottky et Carathéodory » et il précise quelques pages après que l'un de ses calculs est « une interprétation de théorèmes de M. Carathéodory, qui a déterminé explicitement la fonction $\varphi(\alpha)$. »
Mais la mention explicite la plus importante est la suivante :
« Comme je l'ai déjà dit, M. Carathéodory va publier la détermination de $\sigma(k,v)$ […] Ainsi, pour le cas particulier $k = 1$, $v = 2$, il a trouvé le résultat suivant :

La limite supérieure du rayon r du cercle $|x| < r$ dans lequel une fonction impaire peut être régulière et différente de -1, a pour valeur $2\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$, où $\varphi(\alpha)$ est la fonction que M. Carathéodory avait déterminée dans sa Note de 1905.

Après avoir appris par M. Carathéodory que $\rho(1,2) = 2\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$, j'en ai trouvé la démonstration directe suivante […] ».

Cette référence est confirmée par la publication de Carathéodory en 1907 aux CRASc. où il explique dans son introduction le contexte de sa stratégie.

« Le but de cette Note est de déterminer, en me servant de la méthode que j'ai déjà employée dans une Communication précédente et qui n'est que l'adaptation directe de l'idée première de M. Picard, certaines constantes que M. Landau a rencontrées dans un travail récent. »

Dans cette Note, Carathéodory redémontre, entre autres, un résultat de Schwarz et il écrit :
« Je dois cette démonstration si élégante d'un théorème connu de M. Schwarz à une communication orale de M. E. Schmidt. »

Grâce à une particularisation d'une formule de Darboux, il obtient la valeur explicite de $A(m)$:

$$16\,\frac{\Gamma^{m}\left(1-\frac{1}{m}\right)\Gamma^{2m}\left(1+\frac{1}{2m}\right)}{\Gamma^{m}\left(1+\frac{1}{m}\right)\Gamma^{2m}\left(1-\frac{1}{2m}\right)}$$

et comme $A(2) > A(3) > \ldots > 16$, le maximum est donc $A(2) = 19{,}1571\ldots$

Il remarque enfin que « le cas limite où la fonction n'admet, en tout point du cercle $|x| \leq 1$ différent de $x = 0$, ni la valeur un ni la valeur zéro » peut se traiter via la fonction $\exp(i\,\pi\,\tau(y))$ où $\tau(y)$ désigne la fonction modulaire elliptique qui est « à la constante π près, précisément celle que M. Picard a employée il y a plus de vingt-cinq ans. ».