# Sur les ensembles de Fibonacci modulaires

N. Lygeros

Un ensemble de Fibonacci modulaire est défini de la manière suivante :

$m$ un entier fixe : $\{F_n \mod m\}_{n\in\mathbb{N}}$.

**Proposition** : Si $m \in [2,7]$ alors $\{F_n \mod m\}_{n\in\mathbb{N}} = \mathbb{N}_{m-1}$.

**Preuve :** · Pour $m = 2, 3, 4$ , le résultat est trivial puisque les premiers nombres de Fibonacci sont consécutifs.

· $m = 5$ : les restes 0, 1, 2, 3 sont évidents
et le reste 4 provient de $F_8 = 34$.

· $m = 6$ : les restes 1, 2, 3, 5 sont évidents
le reste 4 provient de $F_8 = 34$
et le reste 0 provient de $F_{12} = 144$.

· $m = 7$ : les restes 1, 2, 3, 5 sont évidents
le reste 0 provient de $F_7 = 21$
le reste 4 provient de $F_{12} = 144$
et le reste 6 provient de $F_6 = 13$.

□

Cette proposition est optimale car elle n'est pas valable pour $m = 8$ ainsi que nous allons le montrer.

**Proposition** : Si $m = 8$ alors $\{F_n \mod m\}_{n\in\mathbb{N}} = \{0,1,2,3,5,7\}$.

**Preuve** : Les restes 0, 1, 2, 3, 5 sont évidents.

Le reste 7 provient de $F_9 = 55$.

Pour montrer que nous ne pouvons obtenir les restes 4 et 6 , il suffit de mettre en évidence la périodicité du système modulaire. En effet nous avons :

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 | 233 | 377 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 0 | 5 | 5 | 2 | 7 | 1 | 0 | 1 | 1 |

période 12

De manière plus générale, pour tout $m$, comme nous avons un nombre fini de termes possibles en raison du modulo, nous avons un nombre fini d'additions possibles aussi il existe une périodicité. Ainsi pour démontrer l'incomplétude de l'ensemble de Fibonacci modulaire associé, il suffit d'examiner la période. De plus comme la suite des nombres de Fibonacci est creuse l'incomplétude sera croissante.