Sur les Lexicodes de Conway

N. Lygeros

La manière la plus classique d'aborder les Lexicodes de John Conway, c'est d'utiliser un algorithme glouton. Celui-ci permet de façon récurrente, de définir l'ensemble des mots qui sont infinis à gauche et qui sont séparés par une distance d. Cette distance s'interprète du point de vue lexicographique comme la différence minimale entre deux mots. John Conway a prouvé que tout Lexicode muni d'une définition adéquate de l'addition et de la multiplication scalaire, est un espace vectoriel. Seulement si nous voulons obtenir un corps, nous ne pouvons utiliser l'addition et la multiplication usuelles puisque même les entiers naturels ne peuvent engendrer cette possibilité. Examinons plus précisément le cas où la distance est égale à trois.

Nous obtenons les nombres suivants :

……000000
……000111
……000222
…
……000nnn
…
……001012
……001103
……001230
……001321
……001456
…
……002023
……002132
…
……003031
…
……004048
…
…
……010013
…

A partir de ces nombres, il n'est pas difficile d'obtenir les théorèmes suivants.

<u>Théorème</u> (Conway) $0 + 0 = 0$

<u>Théorème</u> (Conway) $1 + 1 = 0$ et $1 + 2 = 3$

<u>Démonstration</u>

$$\begin{array}{rr} & \ldots 000111 \\ + & \ldots 001012 \\ \hline & \ldots 0011xy \end{array}$$

Où $x = 1+1$ et $y = 1 + 2$. Or …001103 appartient au lexicode, par conséquent ce mot doit être le résultat de l'addition. Donc $x = 0$ et $y = 3$

<u>Théorème</u> (Conway) Le corps engendré est de caractéristique deux.

<u>Démonstration</u> : En multipliant l'équation $1 + 1 = 0$ par une constante adéquate, nous obtenons $n + n = 0$ pour tout n.

<u>Théorème</u> (Conway) $3 + 2 = 1$

<u>Démonstration</u> : $3 + 2 = (1 + 2) + 2 = 1 + (2+ 2) = 1 + 0 = 0$

<u>Théorème</u> (Conway) $4 + 0 = 4$, $4 + 1 = 5$, $4 + 2 = 6$, $4 + 3 = 7$

Démonstration : Les égalités mentionnées sont des conséquences faciles de l'addition suivante :

$$
\begin{array}{r}
\ldots 0004444\ + \\
\ldots 0010123 \\
\hline
\ldots 0014567
\end{array}
$$

pour le lexicode de distance 4.

En réalité, il est possible de généraliser ce résultat afin d'obtenir toute la table d'addition.

Théorème (Conway) Si A est une puissance de deux alors pour tout B strictement inférieur à A, A + B prend la valeur usuelle tandis que A + A = 0.

Théorème (Conway) Si A est l'un des nombres de la liste suivante :
2, 4, 16, 256, 65536, 4294967296, … alors pour tout B strictement inférieur) A, A – B prend la valeur usuelle tandis A.A est la valeur usuelle de 3 A/2.

Remarque fondamentale : Les lexicodes sont des recouvrements sphériques (empilements de sphères).