Ανάλυση του σημειώματος του Carathéodory
(Cod. Ms. H. Kneser G 5 (2))

Ν. Λυγερός

Στα χειρόγραφα του μαθηματικού H. Kneser που βρίσκονται στη βιβλιοθήκη
του Göttingenυπάρχουν δύο μικρές σελίδες του C. Carathéodory. Βρέθηκαν και οι
δύο στο Münster τον Ιούλιο του 1939. Εκεί παρακολούθησαν διαλέξεις και
ο Carathéodory σημείωσε μερικούς υπολογισμούς που διαφύλαξε ο H. Kneser ο
οποίος έγραψε μετά
τον Carathéodory: Berechnung die Schmidt denDeckplatte für Spiegeteleskope.

Ο Carathéodory θέτει μία συνάρτηση: $y = f(x)$

Οι αρχικές συνθήκες είναι: $r + s + ny = \frac{3}{2}$

Με το σημείο $F\left(0, \frac{1}{2}\right)$ και το σημείο $P(\sin\theta, \cos\theta)$ βρίσκει το σημείο F_{1}.

$$\begin{cases} x = \sin\theta - s\sin u \\ y = \cos\theta - s\cos u \end{cases}$$

Με την αλλαγή σημείου αναφοράς βρίσκει:

$$\begin{cases} r\sin u = \sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta \\ r\cos u = \cos\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta \end{cases}$$

Και γράφει : $r = \sqrt{\frac{5}{4} - \cos\theta}$. Αυτός ο τύπος συνεπάγεται από τους δύο
προηγούμενους –όταν τους βάζουμε στο τετράγωνο. Αλλά επιβεβαιώνεται και
ανεξάρτητα με το θεώρημα του Πυθαγόρα.
Ο στόχος του είναι να καταλήξει στον τύπο:

$$y = \frac{x^4}{4(n-1)} + \frac{x^6}{(n-1)} + \frac{45x^8}{64(n-1)}$$

Πράγμα το οποίο αποδεικνύει ότι υπάρχει μία πολύ καλή προσέγγιση και συνεπώς το
σύστημα του τηλεσκοπίου του Schmidt είναι αποτελεσματικό.
Στην ουσία, οι υπολογισμοί του Carathéodory είναι μία σειρά αναπτυγμάτων του
τύπου Taylor. Πιο αναλυτικά έχουμε:

$$x^2+y^2=s^2-2s\cos(\theta-u)+1,\quad r=\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\theta}$$

$$u=\arctan\left(\frac{\sin\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta}{\cos\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta}\right)\qquad r+s+ny=\frac{3}{2}$$

Άρα έχουμε ένα πρόβλημα του τύπου:

$$y=\varphi(\theta)\qquad \text{και}\qquad x=\psi(\theta)$$

Συνεπώς θέλουμε: $y=\varphi\left(\psi^{-1}(\theta)\right)$

Το πρώτο μέρος είχνει ότι :

$$y=\frac{\theta^4}{4(n-1)}-\frac{19\theta^6}{24(n-1)}+\frac{601\theta^8}{320(n-1)}+o\left(\theta^8\right)$$

και όπως

$$x=\theta-\frac{7}{6}\theta^3+\frac{211}{120}\theta^5+\left(\frac{n}{4(n-1)}-\frac{13987}{5040}\right)\theta^7+o\left(\theta^7\right)$$

βλέπουμε ότι το n επηρεάζει μόνο τους μεγάλους συντελεστές. Συνεπώς επιβεβαιώνει την ιδέα τουCarathéodory δίχως την ανάγκη της ψ^{-1}.