Περί πλήθους αλγεβρικών αριθμών

Ν. Λυγερός

Θεώρημα: $\mathbb{A} \simeq \mathbb{N}$.

Απόδειξη: Για κάθε αλγεβρική εξίσωση Ε

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ με $\alpha_0 > 0$

έστω το ύψος της Ε, ο αριθμός Ν:

$a_0 + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| + |a_n| + n$

κι ένας αλγεβρικός αριθμός α έχει ύψος Ν αν ο αριθμός α είναι ρίζα μιας εξίσωσης ύψους τουλάχιστον Ν.

Υπάρχει μόνο μία εξίσωση ύψους 2: $x = 0$

Υπάρχουν μόνο τέσσερεις εξισώσεις ύψους 3:

$x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $2x = 0$ και $x^2 = 0$

Για κάθε τιμή Ν, υπάρχει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος εξισώσεων ύψους Ν.

Και κατά συνέπεια ένα πεπερασμένο πλήθος αλγεβρικών αριθμών ύψους Ν.

Κατά συνέπεια μπορούμε να ταξινομήσουμε τους αλγεβρικούς αριθμούς σύμφωνα με το ύψος τους.

Και αυτή η ταξινόμηση εμπεριέχει όλους τους αλγεβρικούς αριθμούς.

Συνεπώς το άπειρο των αλγεβρικών αριθμών είναι του ίδιου τύπου με το άπειρο των φυσικών αριθμών.

$\square$

Αυτή είναι η πανέμορφη ιδέα της απόδειξης του Georg Cantor (1845-1918).