Enumérations de sous-structures d'un graphe

N. Lygeros

Considérons un graphe G avec le spectre $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$. Le nombre de chemins fermés de longueur K dans le graphe G est égal à $s_K = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^K$, le Kième moment spectral de G. Le nombre de sommets est égal au nombre de valeurs propres, à multiplicité prés. Le nombre d'arêtes est égal à $s_2 / 2$. Le nombre de triangles est égal à $s_3 / 6$.

Soit $\{e_1,...,e_n\}$ une base orthonormale standard de $\mathbb{R}^n$. Les mn nombres $\alpha_{ij} = \|p_i e_j\|$ sont appelés les angles de G. Les angles α_{ij} d'un graphe satisfont les égalités suivantes :

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^2 = \dim \mathcal{E}(\mu_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}^2 = 1$$

Le degré d_j d'un sommet j, et le nombre t_j de triangles contenant un sommet j d'un graphe G, sont donnés par

$$d_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}^2 \mu_i^2 \text{ et } t_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}^2 \mu_i^3$$

Le nombre q de quadrangles dans un graphe G est donné par

$$q = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^2 \mu_i^2 \left(\mu_i^2 + 1 - \sum_{n=1}^{m} \alpha_{nj}^2 \mu_n^2 \right)$$

Le nombre p de pentagones dans un graphe est donné par

$$p = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^2 \mu_i^3 \left(\mu_i^2 + 5 - 5 \sum_{n=1}^{m} \alpha_{nj}^2 \mu_n^2 \right)$$

Ces résultats de Cretkovic et Rowlinson peuvent être comparés à des calculs directs.