

# Dynamique du problème $3x + 1$ sur la droite réelle

Nik Lygeros,\* Olivier Rozier\*\*

\* LGPC (UMR 5285), Université de Lyon, 69616, Villeurbanne, France

\*\* IPGP (UMR 7154), 75238, Paris, France

nlygeros@gmail.com, rozier@ipgp.fr

## Abstract

The  $3x + 1$  *problem* is a difficult conjecture dealing with quite a simple algorithm on the positive integers. A possible approach is to go beyond the discrete nature of the problem, following M. Chamberland who used an analytic extension to the half-line  $\mathbb{R}^+$ . We complete his results on the dynamic of the critical points and obtain a new formulation the  $3x + 1$  problem. We clarify the links with the question of the existence of wandering intervals. Then, we extend the study of the dynamic to the half-line  $\mathbb{R}^-$ , in connection with the  $3x - 1$  *problem*. Finally, we analyze the mean behaviour of real iterations near  $\pm\infty$ . It follows that the average growth rate of the iterates is close to  $(2 + \sqrt{3})/4$  under a condition of uniform distribution modulo 2.

**Key words** :  $3x + 1$  problem, one-dimensional dynamics, attracting cycles, asymptotic analysis.

**MSC 2010** : 37E05.

## 1 Introduction

Généralement attribué à Lothar Collatz, le *problème*  $3x + 1$  est aussi appelé *conjecture de Syracuse*, en référence à l'Université du même nom. Il se rapporte à la fonction  $T$  définie sur les entiers positifs par

$$(1.1) \quad T(n) := \begin{cases} (3n + 1)/2 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ n/2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

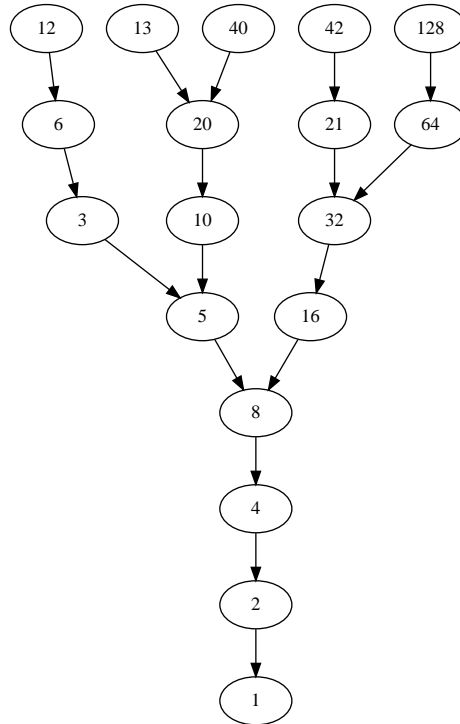


FIG. 1 – Arbre inverse du problème  $3x + 1$  représentant l’ensemble des antécédents de 1 sur sept itérations.

Il s’agit de prouver que toute itération de  $T$  à partir d’un entier positif  $n$  arbitraire conduit nécessairement à la valeur 1. Cette valeur est cyclique de période 2 :  $T(T(1)) = 1$ .

**Conjecture 1.1. Problème  $3x + 1$**

*Pour tout entier  $n > 0$ , il existe un entier  $k \geq 0$  tel que  $T^k(n) = 1$ .<sup>1</sup>*

La figure 1 représente toutes les orbites qui aboutissent à 1 en un maximum de sept itérations.

Le problème  $3x + 1$  se ramène entièrement aux deux conjectures 1.2 et 1.3 sur la dynamique de la fonction  $T$ .

**Conjecture 1.2. Absence de trajectoires divergentes**

*Tout entier positif  $n$  a une orbite  $\{T^i(n)\}_{i=0}^{\infty}$  bornée.*

**Conjecture 1.3. Absence de cycles non-triviaux**

*Il n’existe pas d’entiers  $n > 2$  et  $k > 0$  tels que  $T^k(n) = n$ .*

<sup>1</sup>On note  $T^k(n)$  le  $k^{\text{ème}}$  itéré de  $T$ .

## Dynamique du problème $3x + 1$ sur la droite réelle

La conjecture 1.2 implique que tout entier positif a une orbite cyclique à partir d'un certain rang par itération de  $T$ . La conjecture 1.3 stipule que le seul cycle possible est le cycle  $(1, 2)$ .

Généralement, on convient de stopper les itérations lorsque la valeur 1 est atteinte. Ainsi on appelle *temps de vol* de  $n$  le plus petit entier  $k$  tel que  $T^k(n) = 1$ .

T. Oliveira e Silva a vérifié par des calculs sur ordinateur que tout entier positif  $n < 5 \cdot 2^{60}$  a un temps de vol fini [7].

Les conjectures 1.2 et 1.3, bien qu'abondamment étudiées, ne sont toujours pas résolues. On pourra se référer aux ouvrages de J. Lagarias [7] et G.J. Wirsching [10] pour une synthèse détaillée des résultats partiels relatifs au problème  $3x + 1$  et diverses variantes.

R. E. Crandall [4] a avancé un argument heuristique basé sur l'idée de promenade aléatoire : si l'on considère uniquement la sous-suite des itérés impairs d'un entier  $n$  assez grand, on s'attend à ce que l'ensemble des rapports possibles entre deux termes successifs impairs, à savoir  $3/2, 3/4, 3/8, \dots$ , aient pour probabilités respectives les valeurs  $1/2, 1/4, 1/8, \dots$ . On obtient comme rapport moyen la valeur  $3/4$ . Ceci découle de l'égalité

$$(1.2) \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{8}} \cdots = \frac{3}{4}.$$

Cet argument plaide fortement en faveur de la conjecture 1.2.

Dans le cadre de notre étude, nous appellerons *vitesse moyenne* d'une séquence finie  $\{n, T(n), \dots, T^k(n)\}$  la quantité  $(T^k(n)/n)^{1/k}$ .

Un raisonnement analogue [2] à celui de Crandall suggère que la vitesse moyenne d'une séquence arbitraire non-cyclique a statistiquement une valeur proche de  $\sqrt{3}/2 \simeq 0.866\dots$ , moyenne géométrique de  $1/2$  et  $3/2$ . En effet, la croissance d'une séquence dépend principalement de la parité des itérés successifs. Or, on s'attend à ce que les parités soient équiréparties sur un grand nombre d'itérations.

Ainsi le temps de vol  $k$  d'un entier  $n$  serait tel que  $(1/n)^{1/k} \approx \sqrt{3}/2$  et l'on obtiendrait la valeur moyenne

$$k \approx \frac{2 \ln n}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}$$

en l'absence de cycle [7, p. 7].

Ces estimations sont confortées par les calculs numériques. Il semble donc qu'un tel raisonnement permette de saisir l'essentiel de la dynamique asymptotique du problème  $3x + 1$ .

## 2 Extension sur les réels positifs

Une approche possible du problème  $3x + 1$  est de sortir du cadre discret et d'étendre  $T$  par une fonction analytique sur l'ensemble des nombres réels [3] ou complexes [5, 8]. Nous opterons pour l'extension réelle<sup>2</sup> qui nous paraît la plus naturelle, définie par l'équation (2.1) ci-après, et nous expliciterons les liens étroits qu'entretiennent la dynamique sur les réels et le problème  $3x + 1$ .

Chamberland [3] a étudié la dynamique sur la demi-droite  $\mathbb{R}^+$  de la fonction analytique

$$(2.1) \quad f(x) := x + \frac{1}{4} - \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) \cos(\pi x)$$

qui vérifie  $f(n) = T(n)$  pour tout entier  $n$ , et  $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ . Il a ainsi obtenu plusieurs résultats significatifs :

(2.2) Le point fixe 0 est attractif ainsi que les cycles  $\mathcal{A}_1 := \{1, 2\}$  et  $\mathcal{A}_2 := \{1.192\dots, 2.138\dots\}$  de période 2.

(2.3) La dérivée *Schwartzienne* de  $f$  est négative sur  $\mathbb{R}^+$ .

(2.4) Les intervalles  $[0, \mu_1]$  et  $[\mu_1, \mu_3]$  sont invariants par  $f$ , où  $\mu_1 = 0.277\dots$  et  $\mu_3 = 2.445\dots$  sont des points fixes répulsifs.

(2.5) Tout cycle d'entiers positifs est attractif.

(2.6) Il existe des orbites monotones non-bornées sur  $\mathbb{R}^+$ .

Par ailleurs, il énonce la conjecture "Stable Set" [3] ci-dessous :

**Conjecture 2.1. *Cycles attractifs sur  $\mathbb{R}^+$***

*La fonction  $f$  n'admet aucun cycle attractif sur l'intervalle  $[\mu_3, +\infty)$ .*

Une conséquence immédiate de (2.5) est que la conjecture 2.1 entraîne la conjecture 1.3 du problème  $3x + 1$ .

Puis, il définit l'ensemble des orbites non-bornées

$$(2.7) \quad U_f^\infty := \left\{ x \in \mathbb{R}^+ : \limsup_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = \infty \right\}.$$

---

<sup>2</sup>Le deuxième auteur (O. Rozier) avait antérieurement suggéré l'étude de l'extension (2.1) dans le plan complexe et obtenu des représentations graphiques des bassins d'attraction [1].

## Dynamique du problème $3x + 1$ sur la droite réelle

Le résultat (2.6) prouve que  $U_f^\infty$  est infini, et l'on démontre que  $U_f^\infty$  contient un ensemble de Cantor dans chaque intervalle  $[n, n+1]$  pour tout entier  $n \geq 2$  [8]. Il suit que  $U_f^\infty$  n'est pas dénombrable.

### **Conjecture 2.2. Orbites non-bornées sur $\mathbb{R}^+$**

*L'ensemble  $U_f^\infty$  est d'intérieur vide.*

La conjecture 2.2 est une formulation faible de la conjecture "Unstable Set" [3]. Nous allons montrer qu'elle a des liens logiques avec le problème  $3x + 1$ .

**Lemme 2.1.** *Soit  $\{c_n\}_{n=0}^\infty$  l'ensemble des points critiques de  $f$  dans  $\mathbb{R}^+$ , ordonnés de telle sorte que  $0 < c_1 < c_2 < \dots$ .*

*Alors on a*

$$n - \frac{1}{\pi^2 n} < c_n < n, \text{ si } n \text{ est pair};$$

$$n < c_n < n + \frac{3}{\pi^2 n}, \text{ si } n \text{ est impair}.$$

*Démonstration.* (indications) Soit  $n$  un entier positif. On a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2} \cos(\pi x) + \pi \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) \sin(\pi x)$$

et on vérifie facilement que  $n - \frac{1}{2} < c_n < n$  si  $n$  est pair, et  $n < c_n < n + \frac{1}{2}$  si  $n$  est impair.

De plus, on a toujours  $f'(n) > 0$  et on montre que

$$f' \left( n - \frac{1}{\pi^2 n} \right) < \frac{(20 - 6\pi^2 n)n + 1}{24\pi^2 n^3} < 0, \text{ si } n \text{ est pair},$$

$$f' \left( n + \frac{3}{\pi^2 n} \right) < \frac{(18 - 6\pi^2 n)n + 9}{8\pi^2 n^3} < 0, \text{ si } n \text{ est impair},$$

en utilisant les encadrements  $1 - \frac{t^2}{2} < \cos t < 1$  et  $t - \frac{t^3}{6} < \sin t < t$  pour  $0 < t < 1$ . □

**Lemme 2.2.** *On considère la famille d'intervalles  $J_n^a := [n, n + \frac{a}{\pi^2 n}]$  pour tout entier  $n > 0$  et tout réel  $a$  tel que  $\frac{27}{8} < a < 6$ .*

*Alors on a  $f(J_n^a) \subset J_{f(n)}^a$  pour tout entier  $n$  assez grand.*

*Si de plus  $a = \frac{7}{2}$ , alors l'inclusion est vraie pour tout  $n > 0$ .*

*Démonstration.* Soit un entier  $n > 0$  et un réel  $a$  tel que  $\frac{27}{8} < a < 6$ .

1<sup>er</sup> cas :  $n$  est pair,  $f(n) = \frac{n}{2}$  et  $f$  est croissante sur  $J_n^a$ . On vérifie alors que

$$f\left(n + \frac{a}{\pi^2 n}\right) \leq f(n) + \frac{a}{\pi^2 f(n)} + A \cdot B$$

avec

$$A = \frac{a}{8\pi^4 n^3} \text{ et } B = \pi^2 n (2(a-6)n + a) + 2a^2$$

en utilisant l'inégalité  $1 - \cos t < \frac{t^2}{2}$  pour  $0 < t < 1$ . Comme  $a - 6 < 0$ , il est clair que  $A \cdot B < 0$  pour  $n$  suffisamment grand.

Si de plus  $a = \frac{7}{2}$ , alors  $B \leq \frac{49}{2} - 13\pi^2 < 0$  pour tout  $n$ .

2<sup>e</sup> cas :  $n$  est impair,  $f(n) = \frac{3n+1}{2}$  et  $f$  est croissante sur  $[n, c_n]$  et décroissante sur  $[c_n, n + \frac{a}{\pi^2 n}]$ . On vérifie alors que

$$f\left(n + \frac{a}{\pi^2 n}\right) \geq f(n) - A \cdot B$$

$A$  et  $B$  étant défini comme précédemment, donc  $A \cdot B < 0$  pour  $n$  suffisamment grand. Si de plus  $a = \frac{7}{2}$ , alors  $A \cdot B < 0$  pour tout  $n \geq 3$ , et dans le cas  $n = 1$ , on a

$$f\left(1 + \frac{7}{2\pi^2}\right) = 2.013\dots > f(1).$$

D'après le lemme 2.1, on a  $c_n = n + \frac{b}{\pi^2 n}$  avec  $0 < b < 3$ . Il vient

$$f(c_n) - f(n) \leq \frac{3b}{2\pi^2 n} - \frac{n}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{b}{\pi n}\right)\right)$$

puis en utilisant l'inégalité  $1 - \cos t > \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24}$  pour  $0 < t < 1$ ,

$$f(c_n) - f(n) < \frac{b(6-b)}{4\pi^2 n} + \frac{b^4}{48\pi^4 n^3} \leq \frac{9}{4\pi^2 n} + \frac{27}{16\pi^4 n^3}.$$

On obtient

$$f(c_n) < f(n) + \frac{a}{\pi^2 f(n)} + \frac{C}{D}$$

avec

$$C = 4\pi^2 n^2 ((27 - 8a)n + 9) + 81n + 27 \text{ et } D = 16\pi^4 n^3 (3n + 1).$$

On voit que  $C < 0$  pour  $n$  suffisamment grand. Si de plus  $a = \frac{7}{2}$  et  $n \geq 11$ , on a alors

$$C = 4\pi^2 n^2 (9 - n) + 81n + 27 < 0$$

## Dynamique du problème $3x + 1$ sur la droite réelle

et dans les cas où  $n = 1, 3, 5, 7$  ou  $9$ , on vérifie numériquement que

$$f(c_n) - f(n) - \frac{7}{(3n+1)\pi^2} < 0$$

en utilisant les valeurs  $c_1 = 1.180938\dots$ ,  $c_3 = 3.084794\dots$ ,  $c_5 = 5.054721\dots$ ,  $c_7 = 7.040311\dots$  et  $c_9 = 9.031889\dots$   $\square$

On déduit du lemme 2.2 un lien logique entre les conjectures 1.2 et 2.2 :

**Théorème 2.1.** *La conjecture 2.2 implique la conjecture 1.2 (absence d'orbites non-bornées) du problème  $3x + 1$ .*

*Démonstration.* Supposons que la conjecture 2.2 soit vraie et que la conjecture 1.2 soit fautive. Alors il existe un entier positif  $n_0$  tel que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f^k(n_0) = \infty.$$

D'après le lemme 2.2, une simple récurrence donne

$$f^k \left( J_{n_0}^{\frac{7}{2}} \right) \subset J_{f^k(n_0)}^{\frac{7}{2}}$$

pour tout entier  $k \geq 0$ . Donc l'ensemble  $U_f^\infty$  contient l'intervalle  $J_{n_0}^{\frac{7}{2}}$ , ce qui est en contradiction avec notre hypothèse que  $U_f^\infty$  soit d'intérieur vide.  $\square$

## 3 Dynamique des points critiques

Les résultats (2.3) et (2.5) entraînent que le bassin d'attraction immédiat de tout cycle d'entiers strictement positifs contient au moins un point critique [3]. Pour cette raison, Chamberland a effectué des calculs numériques relatifs aux orbites des points critiques  $c_n$  pour  $n \leq 1000$ . Il énonce la conjecture "Critical Points" ci-dessous :

**Conjecture 3.1. Points critiques**

*Tous les points critiques  $c_n$ ,  $n > 0$ , sont attirés par l'un des cycles  $\mathcal{A}_1$  ou  $\mathcal{A}_2$ .*

Nous complétons ici les résultats numériques de Chamberland. Une précision de 1500 chiffres décimaux en virgule flottante est requise pour le calcul de certaines orbites ( $c_{646}$  par exemple). Nous avons vérifié nos résultats avec deux logiciels différents, Mathematica et Maple.

D'après nos calculs, les cycles  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  attirent tous les points critiques  $c_n$  pour  $n \leq 2000$ . Plus précisément,  $c_n$  est attiré par  $\mathcal{A}_2$  pour <sup>3</sup>  $n = \mathbf{1}$ ,

---

<sup>3</sup>En gras les valeurs déjà obtenues par Chamberland.

**3, 5, 382, 496, 502, 504, 508, 530, 550, 644, 646, 656, 666, 754, 830, 874, 1078, 1150, 1214, 1534, 1590, 1598, 1614, 1662, 1854,** et par  $\mathcal{A}_1$  pour toutes les autres valeurs de  $n \leq 2000$ . Nous avons observé que l'orbite de  $c_n$  est toujours proche de l'orbite de  $n$ , sauf pour  $n \equiv -2 \pmod{64}$  et pour  $n=54, 334, 338, 366, 390, 442, 444, 470, 484, 486, 496, 500, \dots$

Les résultats numériques suggèrent la conjecture suivante<sup>4</sup> :

**Conjecture 3.2. *Points critiques d'ordre impair***

*Les points critiques  $c_n$  sont attirés par le cycle  $\mathcal{A}_1 = \{1, 2\}$  pour tout entier  $n \geq 7$  impair.*

Nous montrons à présent que la conjecture 3.2 suffit pour reformuler complètement le problème  $3x + 1$ .

**Théorème 3.1.** *Soit un entier impair  $n \geq 7$  dont l'orbite contient 1. Alors le point critique  $c_n$  est attiré par le cycle  $\mathcal{A}_1$ .*

*Démonstration.* Considérons un entier impair  $n \geq 7$  dont l'orbite contient 1. La construction de l'arbre des orbites inverses de 1, représenté sur la figure 1, montre que l'orbite de  $n$  contient l'un des entiers 12, 13, 16 ou 40. On déduit de règles itératives modulo 3 sur les entiers que les antécédents de 12 sont des entiers pairs. Il vient que  $f^k(n) = 13, 16$  ou  $40$  pour un entier  $k \geq 0$ . Les lemmes 2.1 et 2.2 entraînent que  $c_n$  appartient à  $J_n^{\frac{7}{2}}$  et  $f^k(c_n)$  se trouve dans  $J_{13}^{\frac{7}{2}} \cup J_{16}^{\frac{7}{2}} \cup J_{40}^{\frac{7}{2}}$ .

1<sup>er</sup> cas :  $f^k(n) = 13, f^k(c_n) \in J_{13}^{\frac{7}{2}}$ . La séquence des itérés de  $f^k(n)$  est  $13 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ .

Soit  $m$  un entier pris dans cette séquence. La fonction  $f$  est unimodale sur  $J_m^{\frac{7}{2}}$  avec un maximum en  $c_m$  lorsque  $m$  est impair, et strictement croissante lorsque  $m$  est pair. Ce comportement permet de déterminer les images successives de  $J_{13}^{\frac{7}{2}}$  en fonction de  $c_{13} = 13.022478\dots$

$$f\left(J_{13}^{\frac{7}{2}}\right) = [20, f(c_{13})]$$

$$f^3\left(J_{13}^{\frac{7}{2}}\right) = [5, f^3(c_{13})]$$

avec  $f^3(c_{13}) = 5.0249\dots < c_5 = 5.0547\dots$

$$f^7\left(J_{13}^{\frac{7}{2}}\right) = [1, f^7(c_{13})]$$

---

<sup>4</sup>Dans [5], une conjecture analogue avec davantage d'hypothèses est formulée relativement à une autre extension de la fonction  $T$  sur les réels.



## Dynamique du problème $3x + 1$ sur la droite réelle

avec  $f^7(c_{13}) = 1.0184\dots$

De plus la fonction  $f^2$  est strictement croissante sur l'intervalle  $(1, c_1)$  avec une unique point fixe  $x_1 = 1.023686\dots$  qui est répulsif. Il suit que l'intervalle  $[1, x_1)$  fait partie du bassin d'attraction immédiat du cycle  $\mathcal{A}_1$  et que  $c_n$  est attiré par  $\mathcal{A}_1$ .

2<sup>e</sup> cas :  $f^k(n) = 16$ ,  $f^k(c_n) \in J_{16}^{\frac{7}{2}}$ . On a la séquence  $16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ . Comme précédemment, on obtient l'image

$$f^4\left(J_{16}^{\frac{7}{2}}\right) = \left[1, f^4\left(16 + \frac{7}{32\pi^2}\right)\right]$$

avec  $f^4\left(16 + \frac{7}{32\pi^2}\right) = 1.0227\dots < x_1$ . Donc  $c_n$  est attiré par  $\mathcal{A}_1$ .

3<sup>e</sup> cas :  $f^k(n) = 40$ ,  $f^k(c_n) \in J_{40}^{\frac{7}{2}}$ , et la séquence des itérés est  $40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ . De la même manière, on itère les images successives

$$f^3\left(J_{40}^{\frac{7}{2}}\right) = \left[5, f^3\left(40 + \frac{7}{80\pi^2}\right)\right]$$

avec  $f^3\left(40 + \frac{7}{80\pi^2}\right) = 5.0118\dots < c_5 = 5.0547\dots$ ,

$$f^7\left(J_{40}^{\frac{7}{2}}\right) = \left[1, f^7\left(40 + \frac{7}{80\pi^2}\right)\right]$$

avec  $f^7\left(40 + \frac{7}{80\pi^2}\right) = 1.0047\dots < x_1$ . Ainsi  $c_n$  est attiré par  $\mathcal{A}_1$  dans tous les cas. □

**Remarque 3.1.** *Dans cette démonstration, il n'est pas possible de fusionner les cas 1 et 3 en partant de l'entier 20 car  $f^6\left(J_{20}^{\frac{7}{2}}\right) = \left[1, f^6\left(20 + \frac{7}{40\pi^2}\right)\right] = [1, 1.023691\dots]$  n'est pas inclus (de très peu) dans le bassin d'attraction de  $\mathcal{A}_1$  délimité par  $x_1 = 1.023686\dots$*

**Corollaire 3.1.** *La conjecture 3.2 est logiquement équivalente au problème  $3x + 1$ .*

*Démonstration.* Une conséquence immédiate du théorème 3.1 est que la conjecture 1.1 (problème  $3x + 1$ ) implique la conjecture 3.2 sur la dynamique des points critiques d'ordre impair. On démontre à présent la réciproque.

Considérons un entier  $n > 0$ . Son orbite contient au moins un entier impair  $f^{k_1}(n)$ ,  $k_1 \geq 0$ . Si  $f^{k_1}(n) \leq 5$ , alors l'orbite de  $n$  contient le point 1 (cf. figure 1). On considère à présent le cas  $f^{k_1}(n) \geq 7$ .

Supposons que la conjecture 3.2 soit vraie. Alors il existe un entier positif  $k_2$  tel que

$$f^{k_2}(c_{f^{k_1}(n)}) < 2.$$

De plus, le lemme 2.2 donne par récurrence l'inclusion

$$f^{k_2}(c_{f^{k_1}(n)}) \in J_{f^{k_1+k_2}(n)}^{\frac{7}{2}}.$$

Il découle l'égalité

$$f^{k_1+k_2}(n) = 1. \quad \square$$

## 4 Intervalles errants

L'existence d'*intervalles errants* [9] dans la dynamique de l'extension  $f$  est une question ouverte avec d'importantes implications pour le problème  $3x + 1$ .

### Conjecture 4.1. Absence d'intervalles errants

La fonction  $f$  n'admet pas d'intervalles errants dans  $\mathbb{R}^+$ .

Elle est au cœur du théorème ci-dessous.

**Théorème 4.1.** *On a les relations suivantes entre conjectures :*

- (a) la conjecture 2.2 entraîne la conjecture 4.1,
- (b) la conjecture 4.1 entraîne la conjecture 1.2.

*Démonstration.* Par l'absurde.

(a) Supposons que la conjecture 2.2 soit vraie et que la conjecture 4.1 soit fausse. Cela implique que la fonction  $f$  admette une famille d'intervalles errants sur une partie bornée de  $\mathbb{R}^+$ . Or ce serait en contradiction avec la propriété (2.3) : la dérivée Schwartzienne de  $f$  est négative sur  $\mathbb{R}^+$ .

(b) Supposons que la conjecture 1.2 soit fausse. Alors il existe un entier positif  $n$  tel que  $\lim_{i \rightarrow \infty} f^i(n) = +\infty$ . D'après le lemme 2.2, les intervalles  $\left\{ f^i \left( J_n^{7/2} \right) \right\}_{i=0}^{\infty}$  sont inclus dans les intervalles  $\left\{ J_{f^i(n)}^{7/2} \right\}_{i=0}^{\infty}$ , deux à deux disjoints. Il s'agit d'une famille d'intervalles errants.  $\square$

Une synthèse des liens logiques entre conjectures est donnée en annexe.

## 5 Extension sur les réels négatifs

L'ensemble  $\mathbb{R}^-$  des réels négatifs est également invariant par la fonction  $f$  définie par (2.1). La dynamique sur les entiers négatifs est alors identique, au signe près, à celle de la fonction “ $3x - 1$ ”, notée  $U$  et définie sur les entiers positifs par

$$(5.1) \quad U(n) := \begin{cases} (3n - 1)/2 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ n/2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, on a la relation de conjugaison  $f(-n) = -U(n)$  pour tout entier  $n$  positif. La fonction  $U$  admet le point fixe 1 et a deux cycles connus :  $\{5, 7, 10\}$  de période 3 et  $\{17, 25, 37, 55, 82, 41, 61, 91, 136, 68, 34\}$  de période 11. Cela conduit à formuler le “*problème  $3x - 1$* ” :

### Conjecture 5.1. *Problème $3x - 1$*

*Pour tout entier  $n > 0$ , il existe un entier  $k \geq 0$  tel que  $U^k(n) = 1, 5$  ou  $17$ .*

Les valeurs de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$  et  $(-\infty, -1]$  sont liées par l'équation fonctionnelle

$$(5.2) \quad f(x) - f(-1 - x) = 2x + 1$$

de sorte que les points fixes de  $f$  sur  $(-\infty, -1]$  sont exactement les points  $\nu_i := -1 - \mu_i$ , où  $\{\mu_i\}_{i=0}^\infty$  désigne l'ensemble des points fixes de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$ ,  $\mu_0 = 0 < \mu_1 < 1 < \mu_2 < 2 < \dots$

Néanmoins, la dynamique de  $f$  sur  $\mathbb{R}^-$  diffère partiellement de celle que l'on a pu décrire sur  $\mathbb{R}^+$ , comme le montrent les propriétés (5.3) à (5.7).

(5.3) Les points fixes 0 et  $\nu_1 = -1.277\dots$  sont attractifs, ainsi que les cycles

$$\mathcal{B}_1 := \{x, f(x), f^2(x)\} \text{ où } x = -5.046002\dots,$$

$$\mathcal{B}_2 := \{x, f(x), f^2(x)\} \text{ où } x = -4.998739\dots,$$

$$\mathcal{B}_3 := \{x, f(x), \dots, f^{10}(x)\} \text{ où } x = -17.002728\dots,$$

$$\mathcal{B}_4 := \{x, f(x), \dots, f^{10}(x)\} \text{ où } x = -16.999991\dots$$

(5.4) La dérivée Schwartzienne de  $f$  n'est pas partout négative sur  $\mathbb{R}^-$ .

(5.5) Les intervalles  $[-1, 0]$  et  $[\nu_1, -1]$  sont invariants par  $f$ .

(5.6) Tout cycle d'entiers négatifs est répulsif.

(5.7) Il existe des orbites monotones non-bornées sur  $\mathbb{R}^-$ .

Point ou cycle attractif	Période	Multiplicateur
0	1	0.5
$\nu_1$	1	0.385708...
$\mathcal{B}_1$	3	0.036389...
$\mathcal{B}_2$	3	0.866135...
$\mathcal{B}_3$	11	0.003773...
$\mathcal{B}_4$	11	0.926287...

TAB. 1 – Coefficients multiplicateurs des points et cycles attractifs sur les réels négatifs.

*Démonstration.* (indications)

Propriété (5.3) : Les vitesses d'attraction sont données dans le tableau 1.

Propriété (5.4) : La dérivée Schwartzienne est positive sur un intervalle contenant le point -0.2. On a en effet  $Sf(-0.2) = 39.961\dots$ , où

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

Propriété (5.5) : La fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[\nu_1, 0]$  contenant le point fixe répulsif -1.

Propriété (5.6) : Voir les indications dans [3, p.16].

Propriété (5.7) : La démonstration est similaire à celle de (2.6). □

**Remarque 5.1.** *Les cycles  $\mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{B}_4$  sont très faiblement attractifs car leur multiplicateur est proche de 1 (cf. tableau 1). On vérifie également que les cycles contenant les points -5 et -17 sont très faiblement répulsifs, avec pour multiplicateurs respectifs les rationnels  $9/8$  et  $2187/2048$ .*

Comme précédemment, on note  $c_n$  les points critiques proches des entiers  $n < 0$ , et on peut montrer que les itérés successifs de  $c_n$  pour  $n$  impair négatif restent proches des itérés de  $n$ , par valeurs inférieures. Nous avons vérifié numériquement pour tout entier  $n$ ,  $-1000 < n < 0$ , que

## Dynamique du problème $3x + 1$ sur la droite réelle

- si  $n$  est impair et  $f^k(n) = -1$  (resp.  $-5, -17$ ) pour un entier  $k$ , alors l'orbite de  $c_n$  converge vers  $\nu_1$  (resp.  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3$ );
- si  $n$  est pair et  $f^k(n) = -1$  (resp.  $-5, -17$ ) pour un entier  $k$ , alors l'orbite de  $c_n$  converge vers  $0$  (resp.  $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_4$ ), sauf pour  $n = -34, -66, -98, -130, -132, -162, -174, -194, -202, -226, \dots$  où l'orbite de  $c_n$  converge vers  $\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3, \nu_1, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1, \nu_1, \mathcal{B}_1, \nu_1, \nu_1, \dots$  respectivement. On note que les entiers  $n \equiv -2 \pmod{32}$  semblent toujours faire partie des exceptions.

Le plus souvent, lorsque  $n < 0$  est pair, l'orbite de  $c_n$  reste proche de l'orbite de  $n$ , par valeurs supérieures. Pour  $n = -34, -98, -132, -162, -202, \dots$  les itérés de  $c_n$  finissent pas être inférieurs aux itérés de  $n$ , sans s'en éloigner pour autant. Pour  $n = -66, -130, -174, -194, -258, \dots$  les orbites de  $n$  et de  $c_n$  sont décorréélées après un nombre fini d'itérations. Dans ce dernier cas, on observe une répartition des orbites de  $c_n$  dans chacun des six bassins d'attraction de  $\mathbb{R}^- : 0, \nu_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$  et  $\mathcal{B}_4$ .

### **Conjecture 5.2. Points critiques d'ordre négatif impair**

*Les points critiques  $c_n$  sont attirés soit par le point fixe  $\nu_1$ , soit par l'un des cycles  $\mathcal{B}_1$  ou  $\mathcal{B}_3$ , pour tout entier  $n < 0$  impair.*

## 6 Dynamique asymptotique

Dans cette partie, nous étudions le comportement moyen de séquences finies ou infinies d'itérations de  $f$ , afin de déterminer la vitesse moyenne asymptotique (i.e. au voisinage de  $\pm\infty$ ).

Nous dirons ainsi qu'une séquence infinie  $S = \{f^i(x)\}_{i=0}^\infty$  est uniformément distribuée modulo 2 (u. d. mod 2) si et seulement si la discrédance à l'origine de  $\{f^i(x) \bmod 2\}_{i=0}^{n-1}$  dans l'intervalle  $[0, 2]$ , notée  $D_n^*(S \bmod 2)$ , vérifie<sup>5</sup>

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n^*(S \bmod 2) = 0.$$

Dans le cas d'une séquence finie  $S = \{f^i(x)\}_{i=0}^n$ , nous dirons de manière informelle que  $S$  est u. d. mod 2 dès lors que  $D_n^*(S \bmod 2) \ll 1$ .

On rappelle que la notion de discrédance est une mesure de l'uniformité de la distribution d'une séquence de points  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\} \in [a, b]^n$  et est définie par

$$(6.1) \quad D_n^*(\mathcal{X}) := \sup_{a \leq c < b} \left| \frac{|\{x_1, \dots, x_n\} \cap [a, c]|}{n} - \frac{c - a}{b - a} \right|$$

Elle intervient notamment dans l'inégalité de Koksma [6] :

---

<sup>5</sup>On note  $x \bmod 2$  la valeur modulo 2 de tout réel  $x$ , définie par  $x \bmod 2 := x - 2\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ .

**Théorème 6.1.** (*Koksma*) Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à variation (totale)  $V(f)$  bornée. Alors pour toute séquence  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\} \in [a, b]^n$ , on a

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| < V(f) D_n^*(\mathcal{X})$$

Nous considérons dorénavant que la fonction  $f$  définie par (2.1) s'applique sur  $\mathbb{R}$  tout entier. Comme  $f$  ne s'annule qu'en 0, il suit que  $f^n(x)$  est de même signe que  $x$  pour tout réel  $x \neq 0$  et tout entier  $n$ .

Notre approche consiste à approximer  $f(x)/x$  par son asymptote sinusoidale

$$(6.2) \quad g(x) := 1 - \frac{\cos(\pi x)}{2}$$

dont on détermine la moyenne géométrique.

**Lemme 6.1.** La moyenne géométrique  $\tau$  de la fonction réelle  $g(x) = 1 - \cos(\pi x)/2$  sur  $[0, 2]$  est égale à  $\alpha/4$ , où  $\alpha = 2 + \sqrt{3}$  est racine du polynôme  $X^2 - 4X + 1$ .

*Démonstration.* On cherche à calculer  $\tau := \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^2 \ln(g(t)) dt\right)$  avec

$$g(t) = 1 - \cos(\pi t)/2 = (\alpha - e^{i\pi t})(\alpha - e^{-i\pi t})/(4\alpha) = |\alpha - e^{i\pi t}|^2/(4\alpha).$$

On obtient

$$\ln \tau = \int_0^2 \ln |\alpha - e^{i\pi t}| dt - \ln(4\alpha).$$

La formule de Jensen relative aux fonctions analytiques sur le disque de centre  $\alpha$  et de rayon 1 donne le résultat attendu

$$\ln \tau = 2 \ln \alpha - \ln(4\alpha) = \ln\left(\frac{\alpha}{4}\right). \quad \square$$

On montre à présent qu'au voisinage de  $\pm\infty$  toute séquence d'itérations u. d. mod 2 de  $f$  décroît avec une vitesse moyenne proche de  $\tau = (2 + \sqrt{3})/4 \simeq 0.933\dots$

**Théorème 6.2.** Soit une séquence finie d'itérations  $S = \{f^i(x)\}_{i=0}^n$  telle que  $\min\{|f^i(x)|\}_{i=0}^{n-1} \geq M$  pour un réel  $M > \frac{1}{3}$ . Alors on a

$$\left| \frac{1}{n} \ln \left( \frac{f^n(x)}{x} \right) - \ln \tau \right| < 2(\ln 3) D_n^*(S \bmod 2) - \ln \left( 1 - \frac{1}{3M} \right).$$

## Dynamique du problème $3x + 1$ sur la droite réelle

*Démonstration.* On considère la formulation  $f(t) = g(t)(t + h(t))$  où  $h$  est la fonction périodique

$$h(t) := \frac{1 - \cos(\pi t)}{4g(t)} = \frac{1 - \cos(\pi t)}{4 - 2\cos(\pi t)}.$$

On a donc

$$\frac{f^n(x)}{x} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{f^{i+1}(x)}{f^i(x)} = \prod_{i=0}^{n-1} g(f^i(x)) \left(1 + \frac{h(f^i(x))}{f^i(x)}\right)$$

Il vient alors

$$\frac{1}{n} \ln \left( \frac{f^n(x)}{x} \right) - \ln \tau = A + B$$

avec

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(g(f^i(x))) - \ln \tau$$

et

$$B = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left( 1 + \frac{h(f^i(x))}{f^i(x)} \right)$$

D'après le lemme 6.1,

$$\ln \tau = \frac{1}{2} \int_0^2 \ln(g(t)) dt$$

On applique l'inégalité de Koksma :

$$|A| \leq V(\phi) D_n^*(S \bmod 2)$$

où  $V(\phi)$  est la variation totale de la fonction  $\phi(t) := \ln(g(t))$  sur  $[0, 2]$ , soit  $V(\phi) = 2\phi(1) - \phi(2) - \phi(0) = 2 \ln 3$ .

Pour majorer  $|B|$ , on vérifie que la fonction  $h(t)$  est à valeur dans  $[0, 1/3]$  avec un maximum en  $t = 1$ . On en déduit que

$$|B| \leq \max \left( -\ln \left( 1 - \frac{1}{3M} \right), \ln \left( 1 + \frac{1}{3M} \right) \right) = -\ln \left( 1 - \frac{1}{3M} \right). \quad \square$$

Le théorème 6.2 est inopérant pour les séquences d'entiers, dont la vitesse moyenne attendue est  $\sqrt{3}/2$ , strictement inférieure à  $\tau$ . Il permet toutefois d'établir un lien entre la vitesse moyenne et la distribution modulo 2 des itérations.

**Théorème 6.3.** *Soit  $x$  un réel d'orbite  $\{f^i(x)\}_{i=0}^\infty$  telle que*

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} |f^i(x)| > \frac{1}{3(1-\tau)} \simeq 4.97\dots$$

*Alors l'orbite de  $x$  n'est pas uniformément distribuée modulo 2.*

*Démonstration.* Il existe un entier positif  $N$  et un réel  $a > 1$  tels que

$$|f^i(x)| \geq \frac{a}{3(1-\tau)}$$

pour tout  $i \geq N$ .

On considère les séquences finies  $S_n = \{f^i(x)\}_{i=N}^{n+N}$  pour tout  $n$  entier positif, et on pose  $M_n := \min\{|f^i(x)|\}_{i=N}^{n+N}$ .

D'après le théorème 6.2,

$$\frac{1}{n} \ln \left( \frac{f^{n+N}(x)}{f^N(x)} \right) - \ln \tau < 2(\ln 3) D_n^*(S_n \bmod 2) - \ln \left( 1 - \frac{1}{3M_n} \right).$$

Il vient

$$2(\ln 3) D_n^*(S_n \bmod 2) > A_n + B_n$$

avec

$$A_n = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{f^{n+N}(x)}{f^N(x)} \right)$$

et

$$B_n = -\ln \tau + \ln \left( 1 - \frac{1}{3M_n} \right).$$

D'une part, on vérifie aisément que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \geq 0$ . D'autre part, on a

$$B_n \geq -\ln \tau + \ln \left( 1 - \frac{1-\tau}{a} \right) = \ln \left( 1 + \frac{(a-1)(1-\tau)}{a\tau} \right) > 0.$$

On obtient donc le résultat souhaité :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} D_n^*(S_n \bmod 2) \geq \frac{\ln \left( 1 + \frac{(a-1)(1-\tau)}{a\tau} \right)}{2 \ln 3} > 0. \quad \square$$

L'existence d'orbites tendant vers l'infini a été prouvée par Chamberland pour la fonction  $f$  et le corollaire 6.1 donne une condition nécessaire sur l'ensemble des valeurs modulo 2 d'une telle orbite.



**Corollaire 6.1.** *Soit  $x$  un réel d'orbite  $\{f^i(x)\}_{i=0}^{\infty}$  divergente telle que*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |f^i(x)| = +\infty.$$

*Alors l'orbite de  $x$  n'est pas u. d. mod 2.*

Ce résultat renforce la conjecture 2.2. En effet, on peut s'attendre à ce que la condition de distribution uniforme modulo 2 des itérations de  $f$  soit le plus souvent valide au voisinage de  $\pm\infty$ , compte tenu des propriétés suivantes :

- le diamètre et la densité des zones contractantes tend vers 0,
- l'amplitude des oscillations devient infiniment grande.

## Références

- [1] A. Aoufi, O. Rozier, Le problème de Syracuse dans  $\mathbb{C}$ , *Singularité* N°5 (1990) 26.
- [2] E. Barone, Una argumentazione euristica probabilistica sulla successione di Collatz, *Ital. J. Pure Appl. Math.*, 4 (1998) 151–153.
- [3] M. Chamberland, A continuous extension of the  $3x+1$  problem to the real line, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 2 (1996) 495–509.
- [4] R. E. Crandall, On the "3x + 1" problem, *Math. Comp.*, 32 (1978) 1281–1292.
- [5] J. Dumont, C. Reiter, Real dynamics of a 3-power extension of the  $3x+1$  function, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 10 (2003) 875–893.
- [6] L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, John Wiley & Sons, 1974.
- [7] J. Lagarias, *The Ultimate Challenge : The 3x+1 Problem*, American Mathematical Monthly, 2010.
- [8] S. Letherman, D. Schleicher, R. Wood, The  $3n + 1$  problem and holomorphic dynamics, *Experiment. Math.*, 8, (1999) 241–251.
- [9] W. de Melo, S. van Strien, *One-Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, 1993.
- [10] G. J. Wirsching, *The Dynamical System Generated by the  $3n + 1$  Function*, Springer-Verlag, 1998.

# Annexe

La figure 2 ci-dessous résume quelques-uns des principaux résultats de cet article sous la forme de liens logiques entre diverses conjectures.

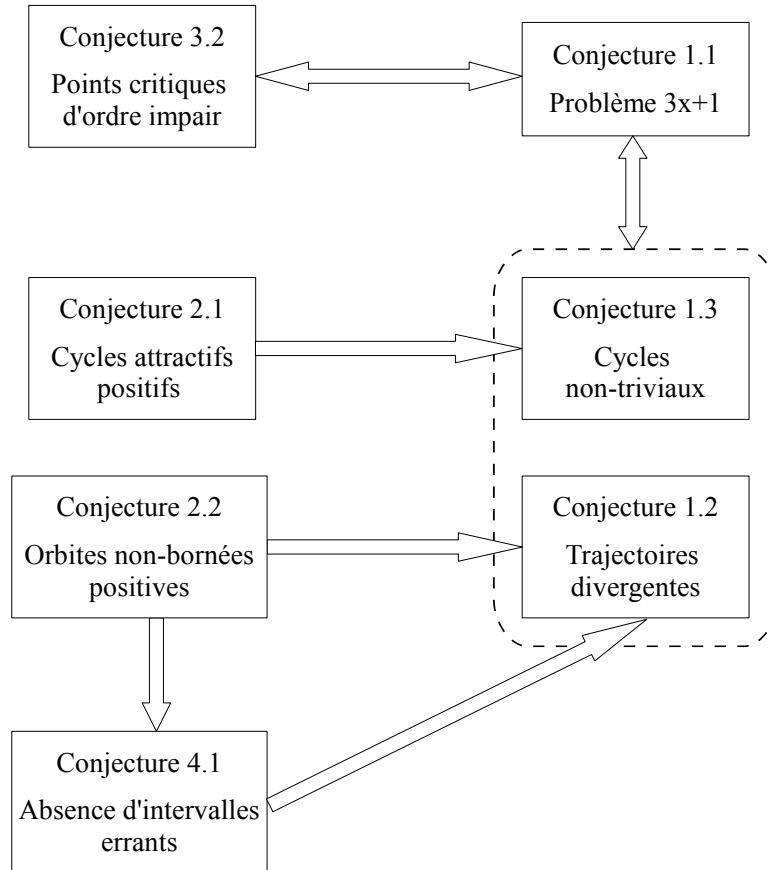


FIG. 2 – Liens logiques entre conjectures. La partie gauche concerne le cadre continu  $\mathbb{R}^+$  et la partie droite le cadre discret  $\mathbb{Z}^+$ .