Βριλήσσια, 17 Μάη 1991

Monsieur Nik Lygeros,

A cause d'une série de contretemps pendant les quatre derniers mois, je me suis détourné bon gré mal gré de mes sujets de réflexion préférés. Je vous le dis non pas pour justifier mais du moins pour expliquer mon retard de répondre à votre lettre du 18/1/2461. D'ailleurs j'envisagerais de vous envoyer un article, rédigé au mois de Janvier et destiné à « Singularité » mais en le relisant je me suis aperçu qu'il fallait le remanier et le compléter de façon à mettre au clair quelques points susceptibles d'inciter à un débat. J'espère pouvoir vous faire parvenir le texte définitif dans un bref délai.

Comme vous pouvez en déduire, je n'ai pas eu le temps d'avancer dans l'étude des « variétés logarithmiques ». La nature des singularités logarithmiques n'est pas tout à fait élucidée même pour la dimension 2. Mon dernier texte, que j'ai laissé au Département de Mathématiques de Limoges pour le prochain n° de publication, traite sans restrictions le problème des géodésiques d'une « nappe logarithmique », mais sans en épuiser tous les aspects à cause d'une difficulté que je n'ai pas pu surmonter. Il n'en reste pas moins que la famille des géodésiques se répartissent, dans le cas général, de façon plus au moins chaotique autour du sommet, de sorte que l'on ne peut pas espérer éclaircir complétement la nature de la singularité sans faire appel à un plongement de la nappe logarithmique dans l'espace euclidien R^3. Or un tel plongement ne peut être (partout) différentiable, et c'est pourquoi sa réalisation donne lieu à un problème difficile sur lequel je n'ai aucun résultat. La non-différentiabilité entraine la réponse à votre question : Les singularités de Thom sont des singularités d'applications différentiables tandis que les singularités logarithmiques sont de nature exotique.

Le problème de la masse sphérique est en effet crucial dans la mesure où il fait ressortir les difficultés d'interprétation et conjointement les difficultés de vérification expérimentale de la théorie d'Einstein. Il semble quand même raisonnable de conjecturer que celle-ci ne soit pas encore épuisé sur le plan expérimental, et cela me fait penser que le problème en question mérite d'être approfondi dans le cadre actuel de différentiabilité.

Cela dit, la non différentiabilité ne me gêne pas du tout, et je pense toujours que l'introduction de sous-variétés singulières exotiques dans les espaces riemanniens est susceptibles de nous faire avancer dans les applications physiques. Bien entendu vos idées vont loin au-delà de cette conception en essayant de fractaliser complétement l'espace-temps. Je ne peux pas trouver ici votre article « Mentalité fractale » de sorte que je ne suis pas informé de votre point de vue. D'autre part, l'article de L. Nottale « Fractals and the quantum theory of spacetime », que j'ai trouvé dans la bibliothèque de l'Ecole Polytechnique d'Athènes) (Ecole où j'ai fait mes études) propose une ébauche qui ne me semble pas claire. D'ailleurs je ne sais pas si j'ai bien compris tout ce qu'il dit. Quand il affirme, par exemple que « The upper transition is given by the de Broglie length and time of the physical system under consideration » il doit mésupposer que toutes les particules considérées possèdent la même impulsion, ce qui limite l'application de son principe à des systèmes très particuliers.

En ce qui concerne la trajectoire continue non différentiable d'une particule en mécanique quantique, je pense que l'on discute en fait un faux problème. La notion de trajectoire en tant que ligne mathématique est une abstraction fondée sur l'existence de points matériels, ce qui me semble une idée purement métaphysique. Les particules sont nécessairement étendues et déformables de sorte que la caractérisation de leur mouvement par des lignes mathématiques est une approximation grossière qui reflète les faiblesses de nos théories. Et cela indépendamment de toute perturbation provoquée par les appareils de mesure.

Voici une question que vous pouvez présenter dans « Singularité », si vous la trouver intéressante (il se peut d'ailleurs que la réponse soit facile) :

Soient $\{a_1, a_2, ..., a_n ...\}$ un ensemble dénombrable dense dans $[0,1]$, $(c_1, c_2, ...c_n, ...)$ une suite de nombres réels positifs tels que la série $\sum_1^\infty c_n$ soit convergente, et $(\gamma_1, \gamma_2, ...\gamma_n, ...)$ une suite de nombres réels choisis dans l'intervalle $]0,1[$. Alors en posant $f(x) = \sum_1^\infty c_n |x - a_n|^{\gamma_n}$ on définit une fonction continue $f : [0,1] \to [0, +\infty[$. Est-ce que f est partout sans dérivée ?

Cas particulier : $f(x) = \sum_1^\infty \frac{\sqrt{|x - a_n|}}{2^n}$

Bien cordialement

A. Stravoulakis