Η εξίσωση της ισόχρονης του Leibniz

Ν. Λυγερός

Έστω V_o η αρχική κάθετη ταχύτητα.
Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μας δίνει:

$$E_c = E_{c_o} + E_p$$
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_o^2 + mgy$$
$$v^2 = v_o^2 + 2gy$$

Επειδή έχουμε $v = \frac{ds}{dt}$ και $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$

Με την υπόθεση: $y = V_o t$ διότι $\frac{dy}{dt} = V_o$

Έχουμε: $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = V_o^2 + 2gy$

Δηλαδή $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2gy$

$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2g}\, y^{1/2}$

$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2gV_o}\, t^{1/2}$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$x = \frac{2}{3}\sqrt{2gV_o}\, t^{3/2}$ άρα $x^2 = \frac{4}{9} \cdot 2 \cdot g \cdot V_o t^3$

$$x^2 = \frac{8}{9} \cdot g\cancel{V_o}\frac{y^3}{{V_o}^{\cancel{3}\,2}} = \frac{8}{9} \cdot g \cdot \frac{y^3}{{V_o}^2}$$

$$y^3 = \frac{9}{8}\frac{{V_o}^2}{g}x^2$$