CALCULS EXHAUSTIFS SUR LES POSETS D'AU PLUS 7 ELEMENTS

N. Lygeros

Abstract : With the help of a computer, we enumerate all the posets having at most 7 elements and we exhaustively show that they can all be represented by circles.

Introduction : On appelle poset (partialy orderd set) un ensemble P muni d'un ordre partiel. Lorsqu'il a n éléments et ρ couples d'éléments comparables, c'est encore un graphe simple à n sommets et ρ arêtes et en orientant transitivement les $(n(n-1)/2-\rho)$ autres arêtes. Quant à sa dimension elle est égale au nombre minimum d'extensions linéaires dont il représente l'intersection. On dit qu'un poset est représentable par cercles si l'on peut lui associer une famille de cercles munie de l'ordre partiel d'inclusion dont les relations entre les éléments s'identifient avec celles que définit le poset.

Se pose alors la question de savoir dans quels cas un poset est représentable par cercles. Depuis longtemps on sait que tout poset de dimension inférieure ou égale à deux est représentable par cercles. Pour la dimension trois on ne connaît que ces deux résultats.

Théorème [1] : (Scheinerman et Wierman) $\mathbb{Z}^3$ n'est pas représentable par cercles.

Théorème [2] : (Hurlbert) $\mathbb{N}^3$ n'est pas représentable par cercles.

Cependant le résultat le plus intéressant - car il a été obtenu de façon constructive - est de dimension 4 :

Théorème [3] : (Brightwell et Winkler) : $\forall n \geq 1$, $P_{(2^{n+2}-2)}$ est représentable par n-sphères mais non par des $(n-1)$-sphères, où les points de $P_{(2^{n+2}-2)}$ sont identifiés avec les sous-ensembles propres de $\{1,2,\ldots,n+2\}$ donc

$$P_{(2^{n+2}-2)} = \{A \subseteq \{1,2,\ldots,n+2\} : 1 \leq CardA \leq n+1\}$$

Avec $A \leq B$ si et seulement si $A \subseteq B$ et $CardA = 1$ ou $CardB = n+1$.

On en déduit l'existence explicite d'un poset à 14 éléments qui n'est pas représentable par cercles.
Une argumentation basée sur la notion de croisement (qui est le plus petit nombre m tel qu'un poset soit représentable par des fonctions réelles dans $[0,1]$ dont les graphes se coupent deux à deux en au plus m points) implique la conjecture suivante :

Conjecture [4] : (J. Sidney, S. Sidney et Urrutia) Cet exemple à 14 éléments est le plus petit poset non représentable par cercles.

De plus, comme cet exemple de dimension 4 est critique dans le sens où si on lui enlève un élément alors le poset obtenu est représentable par cercles, il est naturel de penser que :

Conjecture [5] : (Urrutia) Tous les posets finis de dimension inférieure ou égale à trois sont représentable par cercles.

Notre recherche consistait à tester ces deux conjectures. Les premiers calculs sur les P_n^ρ (nombre de posets à n sommets et ρ arêtes) qui furent effectués à la main, permirent d'introduire une nouvelle conjecture :

Conjecture [6] : (Fraïssé) La suite des P_n^ρ est unimodale.

Ce qui signifie que la suite croit puis décroit pour $\rho \in [1, n(n-1)/2]$. C'est l'auteur de cette conjecture qui obtint les P_5^ρ ; pour $n > 5$ le temps de calcul montre que l'utilisation d'un ordinateur était nécessaire et c'est en grande partie à cette dernière que l'on doit le résultat suivant qui confirme les conjectures citées :

Théorème : Tous les posets d'au plus 7 éléments sont représentables par cercles.

Démonstration : Tout d'abord voici les données qu'a fournies l'ordinateur :

```
n=1;    1 poset;  1
n=2;    2 posets; 1 1
n=3;    5 posets; 1 1 2 1
n=4;   16 posets; 1 1 3 4 3 3 1
n=5;   63 posets; 1 1 3 6 10 10 12 9 6 4 1
n=6;  318 posets; 1 1 3 7 16 25 36 43 46 44 35 28 17 10 5 1
n=7; 2045 posets; 1 1 3 7 18 38 74 113 167 209 243 249 239 204 168 123 83 54 29 15 6 1
```

Pour $n \leq 3$, il est facile de voir que tous les posets obtenus ont un conjugué et grâce au

Théorème [7] : (Dushnik et Miller)

$$(P \text{ a un ordre conjugué }) \iff (\dim P \leq 2)$$

on sait qu'ils sont tous représentables. Pour $n = 4$ et $n = 5$, il suffit d'appliquer

Théorème [8] : (Hiraguchi) $\forall P/\mathrm{Card}P \geq 4 : \dim P \leq \frac{\mathrm{Card}P}{2}$

Pour $n = 6$, après avoir utilisé le théorème 7 et considéré que le dual d'un ordre représentable par cercle l'est lui-même, il suffit d'étudier 2 posets (voir figures) pour montrer qu'ils sont représentables par cercles. Et enfin, pour $n = 7$ la même méthode que pour $n = 6$ ne laisse que 49 posets à étudier qui après un travail fastidieux s'avèrent tous représentables par cercles. (voir figures).

Remarque : Depuis la fin de l'écriture de cet article de nouveaux résultats ont été obtenus ; ils seront exposés dans un nouvel article (voir [9]). Je remercie C. Chaunier pour toute l'aide informatique qu'il m'a apportée.

N. Lygeros
Singularité. Vol 2 N°4 avril 2461/1991

références :

[1] E. Scheinerman, J.C. Wierman : On circle containment orders. Preprint. 1987.
[2] G. Hurlbert : A short proof that $\mathbb{N}^3$ is not a circle containment order. Order 5, 1988, p.235-237.
[3] G. Brightwell, P. Winkler : Sphere orders. Order 6, 1989, p-235-240.
[4] J.B. Sidney, S.J Sidney, J. Urrutia : Circle orders, N-gon orders and the crossing number. Order 5, 1988, p.1-10.
[5] J. Urrutia : Partial orders and euclidean geometry. Dans Algorithms and orders. Kluwer Academic Publishers, 1989, p.387-434.
[6] R. Fraïssé : lettre n°25 (8/2/1991) de la correspondance Fraïssé - Lygeros.
[7] B. Dushnik, E.W. Miller : Partially ordered sets. Amer. J. Math. 63, 1941.
[8] T. Hiraguchi : On the dimension of partially ordered sets. Sci. Rep. Kanazawa Univ. 1, 1955, p.77-94.
[9] R. Fraïssé, N. Lygeros : en preparation.