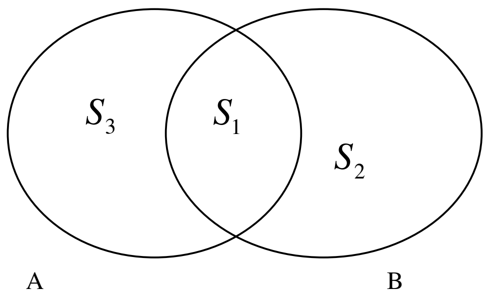
Notes sur la décomposition des somas de Carathéodory

N. Lygeros

<u>Le cas de deux somas A et B :</u> A et B engendrent de manière générique trois régions dans le plan que nous noterons S_1, S_2, S_3

En introduisant les notations de Carathéodory nous avons :



$$S_1 = AB$$
$$S_2 = B \underset{\bullet}{+} AB$$
$$S_3 = A \underset{\bullet}{+} AB$$

Il est alors possible de réécrire $A, B, A \underset{\bullet}{+} AB, A \dot{+} B$ en fonction de S_1, S_2, S_3 :

$$A = S_1 + S_3 \qquad A \dot{+} B = S_1 + S_2 + S_3$$
$$B = S_1 + S_2 \qquad A \underset{\bullet}{+} B = S_2 + S_3$$

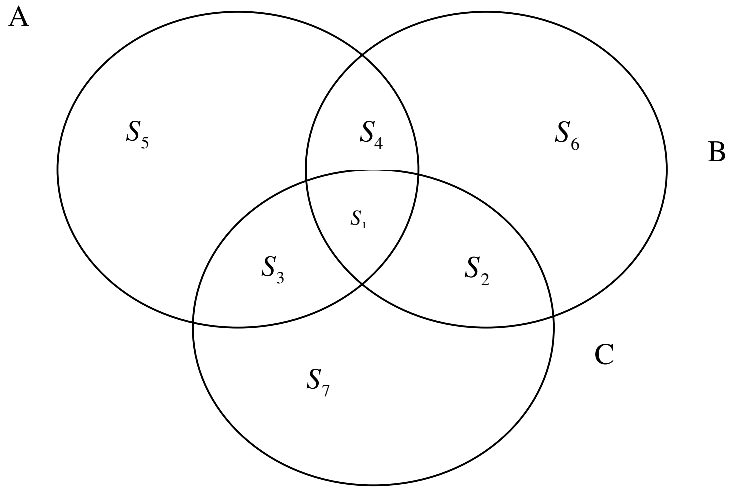
Si nous examinons ces formules, dans le cadres des permutations circulaires, nous remarquons que S_1 est autodual et que S_2 et S_3 sont duaux. Nous en déduisons naturellement que A et B sont duaux dans la décomposition en S_i tandis que $A \dot{+} B$ et $A \underset{\bullet}{+} B$ sont chacun autodual. Cela permet de constater que les 7 formules de Carathéodory proviennent de 5 formules à isomorphie près sur les permutations circulaires. Ceci peut être décrit à l'aide des diagrammes suivants :

$$S_1 \circlearrowright, S_2 \leftrightarrow S_3, A \leftrightarrow B$$
$$\circlearrowright \text{ et } \leftrightsquigarrow \ \Rightarrow \ \circlearrowright A \dot{+} B$$
$$\leftrightsquigarrow \ \Rightarrow \ \circlearrowright A \underset{\bullet}{+} B$$

Cette approche implique que nous avons à gérer des problèmes de génération, d'équivalence et d'isomorphie.

<u>Le cas de plus deux somas :</u> Cette fois, surtout si le nombre est strictement supérieur à trois, nous avons tout d'abord un problème d'énumération des régions du plan engendrées par les positions.

Tandis que dans le cas de trois somas, la situation est élémentaire.



$$S_1 = ABC$$
$$S_2 = BC \underset{\bullet}{+} ABC$$
$$S_3 = AC \underset{\bullet}{+} ABC$$
$$S_4 = AB \underset{\bullet}{+} ABC$$
$$S_5 = A \underset{\bullet}{+} AB \underset{\bullet}{+} AC \underset{\bullet}{+} ABC$$
$$S_6 = B \underset{\bullet}{+} BC \underset{\bullet}{+} BA \underset{\bullet}{+} ABC$$
$$S_7 = C \underset{\bullet}{+} CA \underset{\bullet}{+} CB \underset{\bullet}{+} ABC$$