Représentation géométrique des solutions imaginaires de Géométrie analytique plane

N. Lygeros

Deux axes rectangulaires étant donnés, tous les points du plan sont représentés par les deux coordonnées x et y, pourvu que celles-ci représentent des nombres réels.

Il arrive cependant que l'on doive introduire des <u>points imaginaires</u>, c'est-à-dire des points dont les coordonnées aient des valeurs complexes quelconques on a alors : $x = x_1 + ix_2, y = y_1 + iy_2$

x_1, x_2, y_1, y_2 étant des nombres réels.

Soient 2 plans H et H_1 superposés au plan E et ayant deux systèmes d'axes $(\Xi, H), (\Xi, H_1)$ coïncidant avec x, y. Soit ξ, η, ξ_1, η_1 liés aux x, y par les relations suivantes.

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= m_1x_1 + m_2x_2 + m_3y_1 + m_4y_2 \\
\eta &= n_1x_1 + n_2x_2 + n_3y_1 + n_4y_2 \\
\xi_1 &= p_1x_1 + p_2x_2 + p_3y_1 + p_4y_2 \\
\eta_1 &= q_1x_1 + q_2x_2 + q_3y_1 + q_4y_2
\end{aligned}\right\}$$

A chaque point x, y réel ou imaginaire correspondra un couple de points ξ, η, ξ_1, η_1, et réciproquement.

Supposons que ces 2 points coïncident et n'en forment qu'un seul chaque fois que x, y sera réel et qu'ils coïncident avec lui, c'est-à-dire que pour on ait $x_2 = y_2 = 0$ on ait

$\xi = \xi_1 = x_1, \ \eta = \eta_1 = y_1$

Pour cela il faut que $m_3 = n_1 = p_3 = q_1 = 0$

et que $m_1 = n_3 = p_1 = q_3 = 1$

Les équations deviennent alors

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= x_1 + m_2 x_2 + \quad + m_4 y_2 \\
\eta &= \quad + n_2 x_2 + y_1 + n_4 y_2 \\
\xi_1 &= x_1 + p_2 x_2 + \quad + p_4 y_2 \\
\eta_1 &= \quad + q_2 x_2 + y_1 + q_4 y_2
\end{aligned}\right\}$$

Réciproquement si $\xi = \xi_1$ et $\eta = \eta_1$ on a simultanément

$$(m_2 - p_2)x_2 + (m_4 - p_4)y_2 = 0$$
$$(n_2 - q_2)x_2 + (n_4 - q_4)y_2 = 0$$

quantité qui n'admet que les racines $x_2 = 0, y_2 = 0$

si $\begin{vmatrix} m_2 - p_2 & m_4 - p_4 \\ n_2 - q_2 & n_4 - q_4 \end{vmatrix} \neq 0$

§ Supposons que tout en conservant l'origine
on fasse tourner les axes x, y, Ξ, H, Ξ_1, H_1, d'un
même angle φ les points $(x, y); (\xi, \eta); (\xi_1, \eta_1)$
auront de nouvelles valeurs x', y'
$\xi', \eta', \xi_1', \eta_1'$. Posons comme condition que le couple
$\xi', \eta', \xi_1', \eta_1'$ représentera le point x',y' moyen-

---

nant les formules

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1' &= x_1' + m_2 x_2' + \quad + m_4 y_2' \\
\eta_1' &= \quad + n_2 x_2' + y_1' + n_4 y_2' \\
\xi_1' &= x_1' + p_2 x_2' - \quad p_4 y_2' \\
\eta_1' &= \quad q_2 x_2' - y_1' + q_4 y_2'
\end{aligned}\right\}$$

On a donc les formules de transformation

$$x_i' = x_i \cos\varphi + y_i \sin\varphi \qquad \xi' = \xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi$$
$$y_i' = -x_i \sin\varphi + y_i \cos\varphi \qquad \eta' = -\xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi$$

Donc

$$\xi' = \cos\varphi\left[x_1 + m_2 x_2 + m_4 y_2\right] + \sin\varphi\left[n_2 x_2 + y_1 + n_4 y_2\right]$$
$$= (x_1 \sin\varphi + y_1 \sin\varphi) - m_2(x_2 \cos\varphi + y_2 \sin\varphi) + m_4(-x_2 \sin\varphi + y_2 \cos\varphi)$$

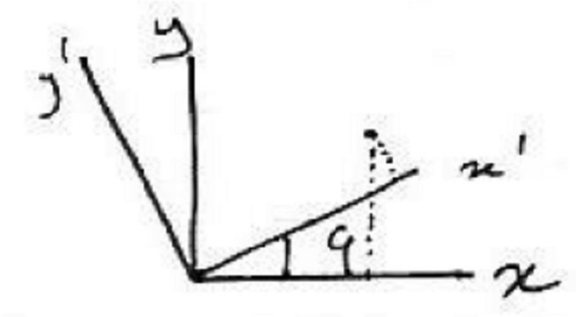
D'où

$$\sin\varphi\left[n_2 x_2 + y_1 + n_4 y_2 - y_1 - m_2 y_2 + m_4 x_2\right] = 0$$

Ou bien $x_2(n_2 + m_4) + y_2(n_4 - m_2) = 0$

De même

$$\eta' = -\sin\varphi[x_1 + m_2x_2 + m_4y_2] + \cos\varphi[n_2x_2 + y_1 + n_4y_2]$$
$$= n_2[x_2\cos\varphi + y_2\sin\varphi] + [-x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi] + n_4[-x_2\sin\varphi + y_2\cos\varphi]$$
$$\sin\varphi[x_1 + m_2x_2 + m_1y_2 + n_2y_2 - x_1 - n_4x_2] = 0$$
$$(m_2 - n_4)x_2 + (m_4 + n_2)y_2 = 0$$



Les équations sont toujours satisfaites si l'on pose $\begin{matrix} n_2 - m_4 - n & m_2 - n_4 - m \\ p_2 = q_4 = p & q_2 = -p_4 = q \end{matrix}$ et de même.

Il vient alors

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x_1 + mx_2 - ny_2 \\ \eta &= nx_2 + y_1 + my_2 \\ \xi_1 &= x_1 + px_2 - qy_2 \\ \eta_1 &= qx_2 + y_1 + py_2 \end{aligned}\right\}$$

La représentation géométrique sera grandement simplifiée si 2 points conjugués $x, y, \overline{x}, \overline{y}$ sont représentés par le même couple c'est-à-dire si

l'on a $\overline{\xi} = \xi, \overline{\eta} = \eta, \overline{\xi_1} = \xi, \overline{\eta_1} = \eta$

or $\overline{x} = x_1 - ix_2 \quad \overline{y} = y_1 - iy_2$

Donc

$$\overline{\xi} = x_1 - mx_2 + ny_2 = x_1 + px_2 - qy_2$$
$$\overline{\eta} = -nx_2 + y_1 - my_2 = qx_2 + y_1 + px_2$$
$$\overline{\xi_1} = x_1 - px_2 + qy_2 = x_1 + mx_2 - ny_2$$
$$\overline{\eta_1} = -qx_2 + y_1 - py_2 = nx_2 + y_1 + my_2$$

Pour satisfaire à cette condition il faut que $p = -m, \ q = -n$

Le déterminant
$$\begin{vmatrix} m_2-p_2 & m_4-p_4 \\ n_2-q_2 & n_4-q_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-p & -n+q \\ n-q & m-p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2m & -2n \\ 2n & 2m \end{vmatrix} = 4\left(m^2+n^2\right)$$
est donc alors toujours différent de 0.
Posons enfin pour nous débarrasser de toute constante arbitraire m=n=1 ou

$$\begin{aligned} \xi &= x_1+x_2-y_2 \\ \eta &= x_2+y_1+y_2 \\ \xi_1 &= x_1-x_2+y_2 \\ \eta_1 &= -x_2+y_1-y_2 \end{aligned}$$

D'où l'on tire
$$\begin{aligned} &\xi+\xi_1 = 2x, \eta+\eta_1 = 2y \\ &\xi-\xi_1 = 2(x_2-y_2) \\ &\eta-\eta_1 = 2(x_2+y_2) \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{\xi-\xi_1}{2} \quad x_2 = \frac{\xi-\xi_1+\eta-\eta_1}{4}$$
$$y_1 = \frac{\eta+\eta_1}{2} \quad y_2 = \frac{-\xi+\xi_1+\eta-\eta_1}{4}$$

II Soit maintenant $F(x,y)=0$ l'équation d'une courbe. On a en remplaçant $x = x_1+ix_2 \quad y = y_1+iy_2$ et en séparant la partie réelle de la parti imaginaire.

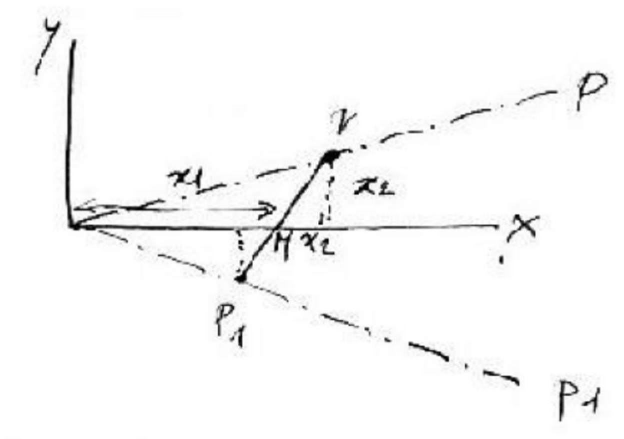
$$f_1(x_1,x_2,y_1,y_2)=0 \quad f_2(x_1,x_2,y_1,y_2)=0$$

et en remplaçant

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)=0 \\ \varphi_2(\xi,\xi_1,\eta,\eta_1)=0 \end{aligned}\right\}$$

Ces 2 équations servent à déterminer tous les points réels et imaginaires de la courbe

---



Chapitre II De la droite

<u>L'axe des x.</u> Posons dans les formules fondamentales
$y = 0$ en faisant varier x_1 et x_2 nous avons tous
les points réels et imaginaires de l'axe des x.
On a

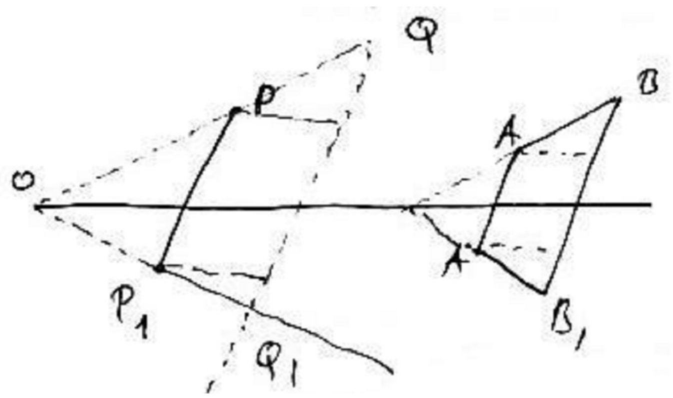
$$\xi = x_1 + x_2 \quad \eta = x_2$$

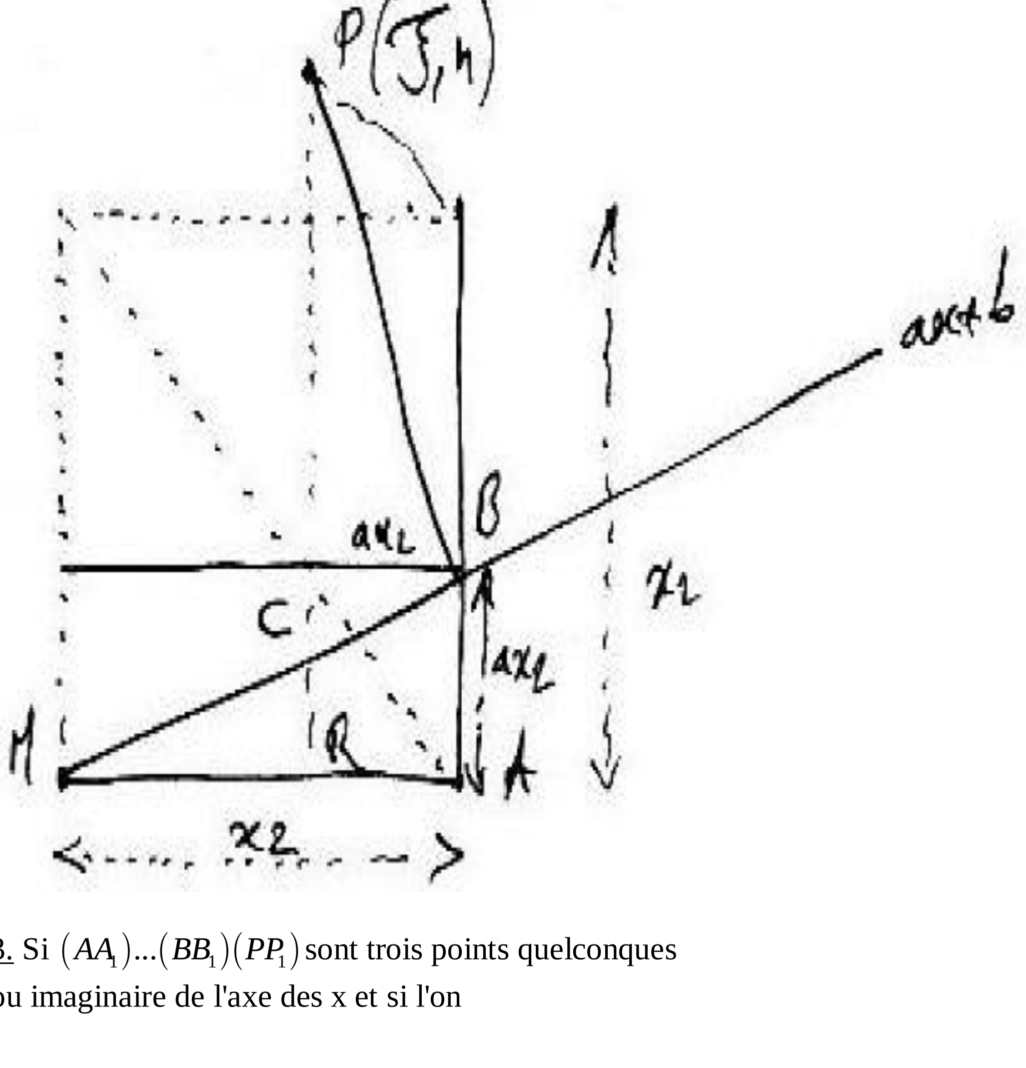
$$\xi_1 = x_1 - x_2 \quad \eta_1 = -x_2$$

La figure indique les opérations à effectuer ainsi
que la cstr pour déterminer P_1 lorsque P est donné et
inversement.

R1 Joignons OP, OP_1, et remarquons que tous les associés
des points de OX dont l'une des coordonnées est sur
P se trouvent sur P' et inversement.

<u>Rem 2</u> : Si le pt O est donné mais OX n'était pas connu en direction
on pourrait facilement le déterminer si l'on connaît
soit les 2 demi-droites associées P et P_1. On prendrait
un point quelconque P de P_1 décrivant sur OP un arc
capable de 135° et chercherait son intersection M avec
la // à P_1, menée par la moitié de OP. OM serait l'axe cherché.





<u>Rem 3.</u> Si $(AA_1)...(BB_1)(PP_1)$ sont trois points quelconques réels ou imaginaire de l'axe des x et si l'on

ajoute géométr. les vecteurs $\overline{AB}$ à $\overline{OP}$ $\overline{A_1B_1}$ à $\overline{OP_1}$ on obtient un nouveau point (Q, Q_1) qui appartient à X. On voit que le théorème d'addition subsiste pour les points imaginaires.

Droite quelconque réelle $y = ax + b$

$$y_1 = ax_1 + b \quad y = ax_2$$

$$\xi = x_1 + x_2 - ax_2$$

$$\eta = x_2 + ax_1 + b - ax_2$$

$$\xi_1 = x_1 - x_2 + ax_2$$

$$\eta_1 = -x_2 + ax_1 + b - ax_2$$

Wir haben $\dfrac{\xi + \xi_1}{2} = x_1 \quad \dfrac{\eta + \eta_1}{2} = ax_1 + b$

Die Mitte M von PP' befindet sich auf der Geraden.
Wir haben $MA = x_2 \;\; RA = ax_2 = CB = BA \;\; RP = x_1 + ax_2$
CP= x_2 . Die Dreieck MBA, CPB sind congruent
PB= und $\perp$ MB. Die constr. der imaginären

Punkte ist identisch mit der von den im . Punkten der Axe OX.
Droite imaginaire

$$y = (\alpha + i\beta)x$$

$$y_1 + iy_2 = (\alpha + i\beta)(x_1 + ix_2)$$

$$= (\alpha x_1 - \beta x_2) + i(\beta x_1 - \alpha x_2)$$

$$y_1 = \alpha x_1 - \beta x_2 \qquad y_2 = \beta x_1 + \alpha x_2$$

$$\xi = x_1 + x_2 - \beta x_1 - \alpha x_2 = (1-\beta)x_1 + (1-\alpha)x_2$$

$$\eta = x_2 + \alpha x_1 - \beta x_2 + \beta x_1 + \alpha x_2 = (\alpha - \beta)x_1 - (1 - \beta + \alpha)x_2$$

$$\xi_1 = x_1 - x_2 + \beta x_1 + \alpha x_2 = (1+\beta)x_1 - (1-\alpha)x_2$$

$$\eta_1 = -x_2 + \alpha x_1 - \beta x_2 - \beta x_1 - \alpha x_2 = (\alpha - \beta)x_1 - (1 + \beta + \alpha)x_2$$

Soit d'abord $x_2 = 0$

$$\frac{\xi}{1-\beta} = \frac{\eta}{\alpha + \beta} = \frac{\xi_1}{1+\beta} = \frac{\eta_1}{\alpha - \beta} = x_1$$