Carathéodory : Die Laval-Turbine

N. Lygeros

Wir haben hier nach der Gl (164) p. 321 v. Müller Prange, mit der Bezeichnung

$$(1)\begin{cases} \xi = x_1 & \eta = x_2 & \varphi = x_3 \\ \mathcal{M}\dot{\xi} = y_1 & \mathcal{M}\dot{\eta} = y_2 & \mathcal{J}\dot{\varphi} = y_3 \end{cases}$$

$$(2)\ \bar{\mathcal{H}} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2\mathcal{M}} + \frac{y_3^2}{2\mathcal{J}} + \frac{c}{2}\left[(x_1 - e\cos x_3)^2 + (x_2 - e\sin x_3)^2\right]$$

Wir setzen

$$(3)\quad \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{J}} = \gamma^2 \qquad \mathcal{M}.c = \beta^2 \qquad s = \mathcal{M}t \qquad \dot{f} = \frac{df}{ds}$$

Die Hamiltonische Funktion nimmt dann die Gestalt an :

$$(4)\quad 2\mathcal{H} = y_1^2 + y_2^2 + \gamma^2 y_3^2 + \beta^2 [\ \ ]$$

<u>Jacobische Integrations methode</u>. Für e = 0 haben wir :

$$(5)\quad 2\mathcal{H}_o = \left(y_1^2 + \beta^2 x_1^2\right) + \left(y_2^2 + \beta^2 x_2^2\right) + \gamma^2 y_3^2$$

Wir suchen nach einer Funktion $S(x_i, \alpha_i)$, so dass für $Sx_i = y_i$ $\mathcal{H}_o = \varphi(\alpha_i)$ wird.

Setzt man :

$$(6)\begin{cases} S = \dfrac{\beta\alpha_1^2}{2}\left(\arcsin\dfrac{x_1}{\alpha_1} + \dfrac{x_1}{\alpha_1^2}\sqrt{\alpha_1^2 - x_1^2}\right) \\ \quad + \dfrac{\beta\alpha_2^2}{2}\left(\arcsin\dfrac{x_2}{\alpha_2} + \dfrac{x_2}{\alpha_2^2}\sqrt{\alpha_2^2 - x_2^2}\right) \\ \quad + \alpha_3 x_3 \end{cases}$$

so hat man :

$$(7)\begin{cases} Sx_1 = \beta\sqrt{\alpha_1^2 - x_1^2} \quad Sx_2 = \beta\sqrt{\alpha_2^2 - x_2^2} \quad Sx_3 = \alpha_3 \\ \qquad\qquad 2\mathcal{H}_0 = \varphi = \beta^2\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right) + \gamma^2\alpha_3^2 \end{cases}$$

Nun setzt man

$$(8)\begin{cases} x_1^{'} = S\alpha_1 \quad x_2^{'} = S\alpha_2 \quad x_3^{'} = S\alpha_3 \quad \mathcal{H}_0^{'} = \varphi \\ y_1^{'} = \alpha_1 \quad y_2^{'} = \alpha_2 \quad y_3^{'} = \alpha_3 \end{cases}$$

dann ist die Transformation Kanonisch und man hat :

$$(9)\begin{cases} \dfrac{dx_1^{'}}{ds} = \beta^2 y_1^{'} \quad \dfrac{dx_2^{'}}{ds} = \beta^2 y_2^{'} \quad \dfrac{dx_3^{'}}{ds} = \beta^2 y_3^{'} \\ \dfrac{dy_i^{'}}{ds} = 0 \end{cases}$$

Nach den Formeln (8) hat man :

$$\begin{cases} x_1^{'} = S\alpha_1 = \beta\alpha_1 \arcsin\dfrac{x_1}{\alpha_1} \\ x_2^{'} = \beta\alpha_2 \arcsin\dfrac{x_2}{\alpha_2} \\ x_3^{'} = x_3 \end{cases}$$

woraus folgt

$$x_1 = y_1^{'} \sin\frac{x_1^{'}}{\beta y_1^{'}} \quad x_2 = y_2^{'} \sin\frac{x_2^{'}}{\beta y_2^{'}} \quad x_3 = x_3^{'}$$

Die Transformische Hamiltonische Funktion

$$2\mathcal{H}\,' = \beta^2\left(y_1^{'2} + y_2^{'2}\right) + \gamma^2 y_3^{'2} - 2\beta^2 e\left(y_1^{'} \sin\frac{x_1^{'}}{\beta y_1^{'}} \cos x_3^{'} + y_2^{'} \sin\frac{x_2^{'}}{\beta y_2^{'}} \sin x_3^{'}\right)$$

Setzt man endlich

$$x_1^{''} = \frac{x_1^{'}}{\beta y_1^{'}} \quad x_2^{''} = \frac{x_2^{'}}{\beta y_2^{'}} \quad \text{und} \quad y_1^{''} = \frac{\beta y_1^{'2}}{2} \quad y_2^{''} = \frac{\beta y_2^{'}}{2}$$

so hat man :

$$y''dx'' - y'dx' = \frac{\beta y'^2}{2}\left(\frac{1}{\beta y'}dx' - \frac{x'}{\beta y'^2}dy'\right) - y'dx'$$
$$= -\frac{1}{2}\left(y'dx' + x'dy'\right) = -\frac{1}{2}d(x'y')$$

Wir haben also

$$\mathcal{H}'' = \beta\left(y_1'' + y_2''\right) + \frac{\gamma^2}{2}y_3''^2 - 2\beta^2 e\left(\sqrt{\frac{2y_1''}{\beta}}\sin x_1''\cos x_3' + \sqrt{\frac{2y_2''}{\beta}}\sin x_2''\sin x_3'\right)$$

<u>Kanonische Differentialgleichungen</u>

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1''}{ds} = \mathcal{H}\, y_1'' = \beta - \dfrac{2\beta\sqrt{\beta}e}{\sqrt{2y_1''}}\sin x_1''\cos x_3' \\ \dfrac{dy_1''}{ds} = -\mathcal{H}\, x_1'' = 2\beta\sqrt{\beta}e\sqrt{2y_1''}\cos x_1''\cos x_3' \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dfrac{dx_2''}{ds} = \beta - \dfrac{2\beta\sqrt{\beta}e}{\sqrt{2y_2''}}\sin x_2''\sin x_3' \\ \dfrac{dy_2''}{ds} = 2\beta\sqrt{\beta}e\sqrt{2y_2''}\cos x_2''\sin x_3' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_3''}{ds} = \gamma^2 y_3' \\ \dfrac{dy_3'}{ds} = 2\beta^2\sqrt{\beta}e\left(\sqrt{2y''}, \sin x'', \sin x_3' - \sqrt{2y_2''}\sin x_2''\cos x_3'\right) \end{cases}$$