Transcription des notes de C. Carathéodory
sur la Note de Nicolas Bourbaki

N. Lygeros

<u>Théorie de la mesure</u> Sur un théorème de Carathéodory et la mesure dans les espaces topologiques. Note de M. <u>Nicolas Bourbaki</u> présentée par M. Elie Cartan. (C. R. Séance du 18 novembre 1935 T.201 p.1309)

La théorie moderne de la mesure et de l'intégration (voir p. ex. <u>S. Saks</u> Théorie de l'Intégrale 1933. Cf. de Possel C.R. du Séminaire mathém. de M. Julia 2, 1934-1935 p 1-19. et C.R. T.201 p.579.) conduit à donner le nom de <u>mesure</u> dans un ensemble quelconque (qui prend alors le nom d'espace mesuré) à toute fonction d'ensemble μE satisfaisant aux axiomes suivants :

I. A tout ensemble E de points de l'Espace correspond un nombre μE tel que $0 \leq \mu E \leq \infty$; si E est vide $\mu E = 0$.

II. Si E est contenu dans la réunion d'ensemble $E\nu$ en nombre fini ou dénombrable, on a

$$\mu E \leq \sum_{\nu} \mu E_{\nu}$$

Nous dirons qu'un ensemble E possède la <u>propriété de Carathéodory</u> si l'on a, quelque soient $A \subset E$ et $B \subset E^c$;

$$\mu(A+B) = \mu A + \mu B \;;$$

et qu'une fonction f(x) a valeurs réelles, définie dans tout l'espace, possède la propriété de Carathéodory si l'ensemble des points ou $f(x) > \alpha$ possède la propriété de Carathéodory quel que soit α, ou autrement dit, si l'on a

$$\mu(A+B) = \mu A + \mu B$$

chaque fois qu'il existe α tel que $f(x) > \alpha$ sur A et $f(x) \leq \alpha$ sur B.

Ces définitions étant posées, je me propose de démontrer le théorème suivant :

Pour que la fonction f(x) possède la propriété de Carathéodory, dans un espace mesuré quelconque, il faut et il suffit que l'on ait

$$\mu(A+B) = \mu A + \mu B \,.$$

pour tout couple d'ensembles A,B tel que la borne inférieure de f sur A soit plus grande que la borne supérieure de f sur B.

[Suit la démonstration du théorème]

Voyez au verso

Si maintenant nous appliquons ce théorème à l'ensemble des fonctions continues dans un ensemble topologique quelconque, nous obtenons le théorème suivant :

<u>Une mesure μE étant donnée dans un espace topologique, la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les fonctions continues possèdent la</u>

propriété de Carathéodory est que l'on ait

$$\mu(A+B)=\mu A+\mu B$$

chaque fois qu'il existe une fonction continue prenant la valeur 1 sur A et la valeur 0 sur B.

D'ailleurs on sait que dans un espace normal une telle fonction continue existe lorsque $\overline{A}\cap\overline{B}=0$ et dans ce cas seulement ; si par exemple il s'agit d'un espace métrique, on obtient l'énoncé sous la forme suivante, qui, pour les espaces euclidiens, a déjà été donnée par Carathéodory
μE étant donnée, dans un espace métrique, la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les fonctions continues possèdent la propriété de Carathéodory est que l'on ait

$$\mu(A+B)=\mu A+\mu B$$

pour tout couple d'ensembles A,B à distance positive l'un de l'autre .

Et d'ailleurs la démonstration ci-dessus n'est que la traduction, en termes abstraits, de celle même de Carathéodory.