# Καταγραφή των σημειώσεων του Κ. Καραθεοδωρή περί της σημείωσης του Nicolas Bourbaki

*Μετάφραση από τα γαλλικά*

Ν. Λυγερός

Θεωρία Μέτρου

Περί ενός θεωρήματος του Καραθεοδωρή και του μέτρου μέσα στους τοπολογικούς χώρους. Σημείωση του κ. Nicolas Bourbaki η οποία παρουσιάστηκε από τον κ. Elie Cartan. (Συνεδρίαση της 18ης Νοεμβρίου 1935 Τ.201, σελ.1309)

Η σύγχρονη θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης (βλέπε π.χ. S. Saks Θεωρία Ολοκλήρωσης 1933. Σύγκρινε με τον Possel C.R. του Σεμιναρίου μαθηματικών του κ. Julia 2, 1934-1935 σελ.1-19. Και C.R. T.201 σελ.579.) συνεχίζει να χρησιμοποιεί το όνομα του μέτρου σε οποιοδήποτε σύνολο (το οποίο παίρνει έτσι το όνομα του μετρηθέντος χώρου) σε κάθε συνάρτηση του συνόλου μΕ ικανοποιώντας τα ακόλουθα αξιώματα:

I. Σε κάθε σύνολο Ε των σημείων του Χώρου αντιστοιχεί ένας αριθμός μΕ τέτοιος που $0 \leq \mu E \leq \infty$ . Εάν το Ε είναι κενό, μΕ = 0.

II. Εάν το Ε περιλαμβάνεται στην ένωση του συνόλου Εν ως αριθμός πεπερασμένος ή αριθμήσιμος, έχουμε:

$$\mu E \leq \sum_{\nu} \mu E_{\nu}$$

Θα πούμε ότι ένα σύνολο Ε έχει την ιδιότητα Καραθεοδωρή εάν έχουμε, έστω $A \subset E$ και $B \subset E^c$ .

$$\mu(A+B) = \mu A + \mu B$$

και ότι μια συνάρτηση f(x) με πραγματικές τιμές, ορισμένη σε όλο το χώρο, έχει την ιδιότητα Καραθεοδωρή, εάν το σύνολο των σημείων όπου $f(x) > \alpha$ έχει την ιδιότητα Καραθεοδωρή έστω *α*, ή διαφορετικά, εάν έχουμε:

$$\mu(A+B) = \mu A + \mu B$$

κάθε φορά που υπάρχει *α* τέτοιο ώστε $f(x) > \alpha$ στο Α και $f(x) \leq \alpha$ στο Β.

Έχοντας θέσει αυτούς τους ορισμούς, καλούμαι να αποδείξω το εξής θεώρημα:

Για να έχει η συνάρτηση f(x) την ιδιότητα Καραθεοδωρή σε οποιοδήποτε μετρηθέντα χώρο, πρέπει και αρκεί να έχουμε:

$$\mu(A+B) = \mu A + \mu B$$

για κάθε ζεύγος συνόλων Α, Β τέτοιο ώστε το κατώτατο όριο του f στο Α να είναι μεγαλύτερο από το ανώτατο όριο του f στο Β.

[Ακολουθεί η παρουσίαση του θεωρήματος]

Βλέπε στο πίσω μέρος

Εάν τώρα εφαρμόσουμε αυτό το θεώρημα στο σύνολο των συνεχών συναρτήσεων σε ένα οποιοδήποτε τοπολογικό σύνολο, παίρνουμε το εξής θεώρημα:

Για ένα μέτρο μΕ δεδομένο μέσα σε έναν τοπολογικό χώρο, ο απαραίτητος και επαρκής όρος έτσι ώστε όλες οι συνεχείς συναρτήσεις να έχουν την ιδιότητα Καραθεοδωρή είναι να έχουμε

$$\mu(A+B)=\mu A+\mu B$$

κάθε φορά που υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση η οποία παίρνει την αξία 1 στο Α και την αξία 0 στο Β.

Εξάλλου ξέρουμε ότι μέσα σε έναν κανονικό χώρο, μια τέτοια συνάρτηση συνεχίζει να υπάρχει όταν $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$ και μόνο σε αυτή την περίπτωση. Εάν για παράδειγμα πρόκειται για ένα μετρικό χώρο, λαμβάνουμε τη διατύπωση στην ακόλουθη μορφή, η οποία, για τους ευκλείδειους χώρους, έχει ήδη δοθεί από τον Καραθεοδωρή

μΕ δεδομένο, μέσα σε ένα μετρικό χώρο, ο απαραίτητος και επαρκής όρος έτσι ώστε όλες οι συνεχείς συναρτήσεις να έχουν την ιδιότητα Καραθεοδωρή είναι να έχουμε

$$\mu(A+B)=\mu A+\mu B$$

για κάθε ζεύγος των συνόλων Α, Β με θετική απόσταση το ένα από το άλλο.

Και εξάλλου η πιο πάνω παρουσίαση δεν είναι παρά η μετάφραση, με την αφαιρετική έννοια, της ίδιας της παρουσίασης του Καραθεοδωρή.