Note sur la démonstration de Carathéodory de l'unicité de la solution du problème V

N. Lygeros

Domaine D : Domaine quelconque du plan z contenant l'origine et le point à l'infini.
Famille Φ : Fonctions $w = f(z)$ qui font la représentation conforme du domaine D sur un domaine D' du plan w, avec les trois conditions

$$f(0)=0, \quad f(\infty)=\infty \quad \text{et} \quad f'(0)=1.$$

Problème V : Trouver une fonction de la famille Φ pour laquelle le module de la dérivée à l'infini, $|f'(\infty)|$, est maximum.

Domaine Extrémal : Domaine D où toute fonction de la famille Φ obéit à $|f'(\infty)| \leq 1$.

Remarque : Pour un domaine extrémal, le problème V admet la solution $w = 2$.
Idée : Le problème V n'a qu'une solution.
Lemme I : Soit $w = f(z)$ une fonction régulière et univalente pour $|z|<1$, qui satisfait aux deux conditions :

$$f(0)=0, \quad |f'(0)|=1.$$

En tout point du cercle $|z| \leq r < \frac{1}{32}$, on a l'inégalité :

$$|f(z)-z| \leq 2^7 r^2.$$

La démonstration élémentaire de Carathéodory se base sur le théorème suivant : sur la circonférence $|z| = \frac{1}{16}$, nous avons $|f(z)| \leq \frac{1}{4}$. Aussi en posant $f(z) = z + \sum_2^\infty a_n z^n$ il obtient via les inégalités de Cauchy $|a_n| \leq \frac{1}{4} 16^n$ et donc : $|f(z)-z| \leq \frac{1}{4} \sum_2^\infty (16r)^n < 2^7 r^2$.

Lemme II : Soit $w = f(z)$ une fonction régulière pour $|z|>1$, sauf au point à l'infini, univalente, jamais nulle, et qui admet un développement de la forme $f(z) = z + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \cdots$

En supposant $|z| \geq R > 4$ on a l'inégalité $|f(z)-z| \leq 16$.

La démonstration de Carathéodory est une réécriture de celle du précédent lemme.
Lemme III : Soit R un domaine du plan $\mathcal{J} = \xi + i\eta$ formé de l'intérieur d'un rectangle de côtés b et a parallèles aux axes, dont on a enlevé un nombre fini de segments parallèles à l'axe réel et ne touchant pas le périmètre. Soit $s(\mathcal{J})$ une fonction qui représente conformément R sur un domaine $\mathcal{D}$ du plan $s = \sigma + i\tau$ avec les conditions suivantes :

1) $s(\mathcal{J})$ est encore régulière sur le périmètre du rectangle.
2) $\mathcal{D}$ est contenu dans une bande de largeur $b+\alpha$ parallèle à l'axe des τ.
3) Les images $A'B'$ et $B'C'$ des côtés AB et BC parallèles à l'axe des η sont extérieures à une bande de largeur $b-\alpha$ limitée par deux parallèles Δ et Δ' à l'axe des τ.
4) Soit M un point de AD d'ordonnée y, M' son image d'ordonnée $\tau(y)$, on a : $|\tau(\eta)-\eta| < x \quad (1)$.

5) Les lignes $A'B'$ et $B'C'$ se déduisent l'une de l'autre par une translation $\underline{a}$ parallèle à l'axe des τ.
Dans ces conditions, si B_1' est le premier point de rencontre avec Δ' de l'image $A'B'$ de AB et si $4\,\delta$ désigne la projection sur l'axe des τ de la ligne $A'B_1'$, on a : $\delta^2(\delta - 2x) \leq 3\,a\,b\,\alpha$.
Cette fois, Carathéodory exploite l'inégalité de Schwarz, obtient une borne naturelle sur l'intégrale double et conclue à l'aide d'un raisonnement sur les projections.
Lemme IV : Considérons un domaine à connexion finie D, contenant l'origine et le point à l'infini, et dont la frontière est tout entière entre les cercles $|z| = \frac{1}{M}$ et $|z| = M$. Soit $w = f(z)$ une solution du problème V pour le domaine D,. Nous avons alors $\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=\infty} \geq 1$.
Etant donné un nombre positif ε, on peut trouver un nombre θ tel que l'inégalité $\left|\frac{d\,w}{d\,z}\right|_{z=\infty} < 1+\theta$ entraine, en tout point de D, et pour des déterminations convenables des arguments : $\left|\arg(w) - \arg(z)\right| < \varepsilon$, le nombre θ ne dépendant pas de D, mais seulement de M et ε.
Carathéodory applique à nouveau le lemme 1, puis le lemme 2 à des fonctions adéquates et se restreint à des inégalités élémentaires. Il travaille ensuite sur $\arg z - \arg w$ en tant que fonction harmonique et effectue des transformations logarithmiques, afin de démontrer le lemme. Le décor est planté et c'est enfin le tour du théorème de regrouper l'ensemble de ses résultats.
Théorème : Soit D un domaine à connexion infinie du plan $\mathcal{J}$, contenant l'origine et le point à l'infini. Considérons une suite de domaines à connexion finie D_n, contenus dans D, et tels que :

1) D_n est contenu dans D_{n+1}.
2) Tout point de D appartient aux D_n pour n assez grand.

Désignons par $z = f(\mathcal{J})$ une solution du problème V qui représente D sur une domaine D^* du plan z, et par $W_n = f_n(\mathcal{J})$ une solution du problème V pour le domaine D_n qui représente D_n sur un domaine D_n^* du plan W_n.
Dans ces conditions, la suite $W_n(\mathcal{J})$ converge vers $z(\mathcal{J})$ en tout point de D. Par conséquent V n'a qu'une seule solution.
Pour aboutir à sa démonstration, Carathéodory utilise le théorème de Stieltjes.