Από τον μετασχηματισμό του Legendre στον μετασχηματισμό του Carathéodory

N. Lygeros

Στο άρθρο του με τίτλο *Περί ενός μετασχηματισμού ανάλογου προς τον μετασχηματισμό του Legendre*, ο Καραθεοδωρή εξηγεί πρώτα τη συμβολή του μετασχηματισμού του Legendre και τη χρήση του από τον Hamilton, που εισήγαγε τις κανονικές μεταβλητές στη θεωρία λογισμού μεταβολών. Η απλοϊκή προσέγγιση της θεωρίας λογισμού μεταβολών πολλαπλών ολοκληρωμάτων επέτρεψε την ύπαρξη της πίστης στης λειτουργικότητα του μετασχηματισμού του Legendre. Όμως η προσεχτική μελέτη του προβλήματος δείχνει όπως γράφει ο ίδιος ο Καραθεοδωρή, ότι η γενίκευση του μετασχηματισμού είναι απαραίτητη. Ο μετασχηματισμός του Καραθεοδωρή είναι η γενίκευση του μετασχηματισμού του Legendre για τα διπλά ολοκληρώματα. Η γοητεία αυτής της γενίκευσης είναι η υπολογιστική της απλότητα. Ο Καραθεοδωρή πριν παρουσιάσει τη γενίκευση, δίνει μια νέα μορφή στον μετασχηματισμό του Legendre για να αναδείξει την αναλογία που υπάρχει μεταξύ των δύο. θεωρεί πρώτα δύο σειρές με (n+1) μεταβλητές.

$$f, p_i \quad \text{και} \quad F, P_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

με τη σχέση $\quad f + F = \sum_i p_i P_i .$

Υποθέτει ότι η f είναι συνάρτηση των p_i και η F των P_i. Η διαφόριση της προηγούμενης εξίσωσης δίνει:

$$\left(df - \sum_i P_i \, dp_i\right) + \left(dF - \sum_i p_i \, dP_i\right) = 0$$

Από αυτόν τον τύπο προκύπτει ότι αν αληθεύει

$$f_{p_i} = P_i \quad \text{ή} \quad F_{p_i} = p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

τότε αληθεύει και η άλλη. Αυτό το συμπέρασμα προσφέρει στον μετασχηματισμό του Legendre την κυριότερη ιδιότητά του. ο συνδυασμός των τύπων συνοψίζεται ως εξής:

$$F = -f(p) + \sum_i p_i P_i .$$

Η συνάρτηση $F(P_i)$ είναι μετασχηματισμένη του Legendre της $f(p_i)$.

Για τη γενίκευση του ο Καραθεοδωρή χρησιμοποιεί 4 σειρές με (2n+1) μεταβλητές οι οποίες είναι οι εξής:

$$\begin{array}{lll} f & p_i & q_i \\ \varphi & \pi_i & \kappa_i \\ F & P_i & Q_i \\ \Phi & \Pi_i & K_i \end{array}$$

οι οποίες έχουν πολυπλοκότερες αλγεβρικές σχέσεις από εκείνη που χρησιμοποιεί ο μετασχηματισμός του Legendre. Όμως με τις ίδιες παρατηρήσεις ο Καραθεοδωρή βρίσκει τις δύο επόμενες εξισώσεις:

$$df - \sum_i \left(\pi_i \, dp_i + \kappa_i \, dq_i\right) = \sum_j f_{x_j} dx_j$$

και $$dF = -\frac{F}{\varphi} \sum_j f_{x_j} dx_j + \sum_j \left(\Pi_i dP_i + K_i dQ_i\right)$$

Αυτό επιτρέπει να καταλήξει στους εξής τύπους:

$$F_{x_j} = -\frac{F}{\varphi} f_{x_j} \quad , \quad F_{p_i} = \Pi_i \quad , \quad F_{Q_i} = K_i$$

Ο μετασχηματισμός του Καραθεοδωρή δεν γενικεύει μόνο τον μετασχηματισμό του Legendre, έχει και μια ανάλογη μορφή που οδηγεί και σε μεγαλύτερες γενικεύσεις. Με την προσέγγιση του Καραθεοδωρή η πολυπλοκότητα είναι μόνο υπολογιστική και όχι θεωρητική.