Petits posets : dénombrement, représentabilité par cercles et "compenseurs"

Roland Fraïssé, Nik Lygeros

Résumé - On dénombre tous les posets à 10 éléments, on montre que ceux qui ont au plus 7 éléments sont représentables par cercles et on introduit un nouvel outil combinatoire : le compenseur. Chacun des trois aspects de notre étude est accompagné de plusieurs conjectures et questions.

Small posets : enumerations, circle orders and "compensors"

Abstracts : - We enumerate all the posets on at most 10 elements, show that those on at most 7 elements are circle orders and introduce a new combinatorial tool : the compensor. Each of the three bearings of our study is followed by several conjectures and questions.

1. Dénombrements - On note P_n^p le nombre de posets ayant n sommets et p arêtes. A l'aide de l'ordinateur, nous avons obtenu ces valeurs :

$$P_n^{n(n-1)/2-p}, 0 \leq n \leq 10, 0 \leq p \leq n(n-1)/2$$

TABLEAU I

n\p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
0	1																						
1	1																						
2	1	1																					
3	1	2	1	1																			
4	1	3	3	4	3	1	1																
5	1	4	6	9	12	10	10	6	3	1	1												
6	1	5	10	17	28	35	44	46	43	36	25	16	7	3	1	1							
7	1	6	15	29	54	83	123	168	204	239	249	243	209	167	113	74	38	18	7	3	1	1	
8	1	7	21	46	94	166	274	434	629	874	1136	1402	1621	1767	1792	1705	1506	1219	915	619	381	208	107
9	1	8	28	69	153	300	541	939	1528	2386	3551	5054	6897	8999	11253	13421	15309	16578	17119	16687	15419	13363	10921
10	1	9	36	99	237	506	986	1836	3240	5492	8974	14096	21414	31401	44566	61145	81200	104101	128998	154148	177576	196824	209692

n\p	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
8	44	19	7	3	1	1																	
9	8294	5891	3830	2311	1257	636	287	124	46	19	7	3	1	1									
10	214283	209729	196135	174838	148255	119179	90614	64851	43572	27259	15891	8526	4251	1946	841	329	130	47	19	7	3	1	1

On trouvera des démonstrations complètes, les algorithmes utilisés et des commentaires dans [1]. Ces valeurs nous ont amené à poser :
Conjecture 1. - Pour n fixé, la suite P_n^p est unimodale.
Conjecture 2. - On atteint $Max_p(P_n^p)$ pour $p \sim E(n(n-1)/4)$ à l'unité près.
Conjecture 3.- On a $Max_P(P_n^p)/P_{n-1} \to a$ avec $a > 0$ et $P_n = \sum_p P_n^p$.
Conjecture 4.- On a $Max_p(P_{n+1}^p) Max_p(P_{n-1}^p) \geq Max_p(P_n^p)^2$.

Remarques.
-1. C'est la troisième propriété qui est vraiment remarquable puisque c'est la seule qui différencie P_n^p de C_n^p.

-2. La combinaison de la troisième et de la quatrième pourrait donner une nouvelle approche pour démontrer :

Conjecture (M. Erné [2]). - On a $P_{n+1}P_{n-1} \geq (P_n)^2$. Il n'a en effet réussi qu'à démontrer avec difficulté le résultat suivant : $2P_{n+1}P_{n-1} \geq (P_n)^2$.

A l'aide d'un raisonnement de combinatoire simple nous avons obtenu la formule suivante valable pour $n \geq p$:

$$P_n^{n(n-1)/2-p} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{\substack{(p_1,\ldots,p_r)\in[0,p]^r \\ (n_1,\ldots,n_p)\in[1,n-r+1]^p}} \prod_{i=1}^{r} (*P_{n_i}^{n_i(n_j-1)/2-p_j})$$

Avec $\sum p_i = p$ et $\sum n_i = n$ et où $(*P_n^p)$ est le nombre de posets ayant n sommets, p arêtes et un complémentaire connexe. Ensuite, en utilisant le calcul formel sur ordinateur on montre que pour $n \geq p$:

$$P_n^{n(n-1)/2-p} = \sum_{k=0}^{p} f(p,k) C_{n-p}^{p-k}$$

où l'on a $P_n, 0 \leq n \leq 10 f(p,k), 0 \leq p \leq 9, 0 \leq k \leq p$.

TABLEAU II

	p\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1									
1	1	1	0								
2	2	1	1	0							
5	3	1	2	3	1						
16	4	1	3	7	9	3					
63	5	1	4	12	23	25	10				
318	6	1	5	18	44	72	79	44			
2045	7	1	6	25	73	153	239	266	168		
16999	8	1	7	33	111	278	541	813	899	629	
183231	9	1	8	42	159	458	1048	1920	2787	3106	2386
2567284											

Conjecture 5. - Pour p fixé, $f(p,k)$ est unimodale.
Conjecture 6. - On a $Max_k f(p,k) = f(p,p-1)$.
Conjecture 7. - On a $Max_p f(p,k)/\sum_k f(p,k) \to b$.

Remarque. - Pour nos valeurs, b est proche de 1.

II. Représentation par cercles. - On dit qu'un poset est représentable par cercles si l'on peut lui associer une famille de cercles munie de l'ordre partiel d'inclusion dont les relations entre les éléments s'identifient avec celles que définit le poset. Pour le problème de la représentabilité par cercles, on considère :

Théorème (Brightwell et Winkler[3]). - Pour tout $n \geq 1$, le poset à $(2^{n+2}-2)$ éléments que l'on note $P_{(2^{n+2}-2)}$ est représentable par n-sphères mais non par des $(n-1)$-sphères, où

$$P_{(2^{n+2}-2)} = \{A \subseteq \{1,2,\ldots,n+2\} : 1 \leq \mathrm{Card} A \leq n+1\}$$

avec $A \leq B$ si et seulement si $A \subseteq B$ et $\mathrm{Card} A = 1$ ou $\mathrm{Card} = n+1$.

On en déduit explicitement un poset 14 éléments non représentable par cercles. Une argumentation basée sur la notion de croisement (qui est le plus petit nombre m tel qu'un poset soit représentable par des fonctions réelles dans $[0,1]$ dont les graphes se coupent deux à deux en au plus m points) implique la conjecture suivante :

Conjecture : (J. Sidney, S. Sidney et Urrutia [4]) - Cet exemple à 14 éléments est le plus petit poset non représentable par cercles.

De plus, comme cet exemple de dimension 4 est critique dans le sens où si on lui enlève un élément alors le poset obtenu est représentable par cercles, il est naturel de penser que :

Conjecture : (J. Urrutia [5]) - $(dim \leq 3) \Longrightarrow P$ représentables par cercle.

Théorème. - Tous les posets d'au plus 7 éléments sont représentables par cercles.

Démonstration : Pour $n \leq 3$ il est facile de voir que tous les posets obtenus ont un conjugué et grâce au :

Théorème. (Dushnik, Miller [6]). - (P a un ordre conjugué) $\Longleftrightarrow P \leq 2$) on sait qu'ils sont tous représentables. Pour $n = 4$ et $n = 5$ il suffit d'appliquer :

Théorème (Hiraguchi [7]). $\forall P/\mathrm{Card}P \geq 4, \mathrm{dim}P \leq 1/2\mathrm{Card}P$.

Pour $n = 6$, après avoir utilisé le théorème 7 et considéré que le dual d'un ordre représentable par cercle l'est lui-même, il suffit d'étudier deux posets pour montrer qu'ils sont représentables par cercles. Et enfin, pour $n = 7$, cette méthode ne laisse que 49 posets à étudier qui après un travail fastidieux s'avèrent tous représentables par cercles. (voir [8]).

III Compenseurs. - La notation Q/P concernant deux posets finis, P, Q désigne le nombre des intervalles initiaux de Q qui sont isomorphes à P. Nous avons une matrice carrée dénombrable des quotients Q/P placé chacun sur la ligne P et la colonne Q. Proposons-nous de construire la matrice inverse dont chaque terme $\alpha(P, Q)$ est appelé compenseur et placé sur la ligne P et la colonne Q. Introduisons l'ordre partiel $P \leq Q$ lorsque P est un intervalle initial de Q. Considérons la fonction de Möbius $\mu(P, Q)$ (Rota [9]). On pose $\mu(P, P) = 1$ et $\mu(P, Q) = -\sum \mu(P, X)$ pour tout X vérifiant $P \leq X < Q$. Valeur nulle dans les autres cas. Disons que Q couvre P lorsque $P < Q$ sans poset intermédiaire, et alors $\mu(P, Q) = -1$. Nous devons à Pouzet les deux remarques fondamentales suivantes :

Premièrement, $\mu(P, Q)$ ne prend que les valeur 0, +-1. Plus précisément, d'après un résultat de Hall [10], et compte tenu de ce que le lattis des intervalles initiaux est distributif : ou bien la restriction de Q à la différence des bases $|Q| - |P|$ est une antichaine : alors si p et q sont les cardinaux des bases $|P|$ et $|Q|$ nous avons $\mu(P, Q) = (-1)^{q-p}$, sinon, $\mu(P, Q) = 0$. En effet dans le premier cas la base $|Q|$ est la réunion des bases des posets Q qui couvrent P et sont obtenus chacun en ajoutant un élément arbitraire de $|Q| - |P|$, ce qui est la condition de Hall-Rota.

Deuxièmement, le compenseur $\alpha(P, Q)$ est la somme des $\mu(P', Q)$ pour tous les intervalles initiaux de P' de Q isomorphes à P. Il en résulte immédiatement que la valeur absolue du compenseur $\alpha(P, Q)$ est le nombre des intervalles initiaux de Q isomorphes à P et dont le complémentaire de la base par rapport à $|Q|$ donne une antichaine : le signe de $\alpha(P, Q)$ étant $(-1)^{q-p}$. Il en résulte :

Théorème : - On a $\alpha(P, Q) \leq Q/P$ en valeur absolue.
Au lieu de passer par la méthode inspirée de Hall-Rota, proposons nous de calculer les compenseurs par la résolution algébrique directe : notons X_i les posets de cardinal $p + i$ variant de $p + 1$ jusqu'à $q - 1$. Les résolutions successives d'équations linéaires dont les inconnus sont les compenseurs situés sur une même ligne, les coefficients étant les quotients situés sur une colonne, donnent le résultat suivant où $n = q - p - 1$

$$\alpha(P, Q) = -Q/P + \sum Q/X_1.X_1/P + \ldots + \sum Q/X_n.X_n/P - \sum Q/X_2.X_2/X_1.X_1/P - \ldots$$
$$- \sum Q/X_2.X_2/X_1.X_1/P - \ldots - \sum Q/X_n.X_n/X_{n-1}.X_{n-1}/P + \ldots$$

$$+(-1)^{n+1}\sum Q/X_n.X_n/X_{n-1}.X_{n-1}/X_{n-2}\ldots X_1/P$$

On peut aussi exprimer par sommes alternées chaque valeur de $\mu(P,Q)$ où P n'est plus donné à l'isomorphie près, mais représente un intervalle initial déterminé de Q. La matrice des valeurs de Möbius est l'inverse de la matrice d'incidence [9] que nous pouvons noter $\leq (P,Q)$ puisqu'elle vaut 1 lorsque $P \leq Q$ et 0 sinon. Les inconnues sont à présent les valeurs de Möbius situées sur une même ligne, les coefficients étant les valeurs 0 ou 1 de la matrice d'incidence situées sur une même colonne, et on a :

$$\mu(P,Q) = -1 + \text{ nbre des } X \text{ tels que } P < X < Q - \text{ nbre des couples } (X,Y) \text{ tels que } P < X < Y < Q +$$

$$\text{nbre des triplets } (X,Y,Z) \text{ tels que } P < X < Y < Z < Q - \ldots + (-1)^{q-p} \text{ nbre } (q-p-1)-\text{uples}$$

$$(X,Y,Z,\ldots) \text{ tels que } P < X < Y < Z < \ldots < Q.$$

Autre somme alternée. - Soit X tel que $P < X \leq Q$: disons que X est un vrai intervalle initial (modulo P,Q) lorsque la restriction de X à la différence des bases $|X| - |P|$ est une antichaine. Alors le calcul classique de la valeur de Möbius peut s'écrire sous la forme d'une somme alternée sans connection logique immédiate avec les précédentes :

$$\mu(P,Q) = -1 + \text{ nbre des vrais } X_1 - \text{ nbre des vrais} X_2 + \ldots + (-1)^n \text{nbre des vrais } X_{q-p-1}$$

conséquence immédiate du fait qu'un intervalle initial qui n'est pas vrai donne la valeur $\mu(P,X) = 0$ et qu'un vrai intervalle initial X_i de cardinal $p+i$ donne $\mu(P,X_i) = (-1)^i$.

Question. - Ces trois sommes alternées donnent-elles un signe changeant à chaque étape de l'alternance ?

Nous remercions Maurice Pouzet pour ses judicieuses remarques et pour les indispensables références qu'il nous a procurées, ainsi que Claude Chaunier responsable de la programmation de notre algorithme.

Note remise le 24 juin 1991, acceptée le 22 juillet 1991.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] R. Fraissé et N. Lygeros. *Sur les posets de petit ordre*, soumis à la *Gazette des Mathématiciens.*
[2] M. Erné. Problem 5.3. in *Ordered Sets.* I. Rival éd., 1982. p. 818.
[3] G. Brightwell et P. Winkler. Sphere orders, *Order.* 6. 1989. p. 235-240.
[4] J. B. Sidney, S. J. Sidney et J. Urrutia, Circle orders. N-gon orders and the crossing number, *Order*, 5. 1988. p. 1-10.
[5] J. Urrutia, Partial orders and euclidian geometry. in *Algorithms and orders.* Kluwer Academic Publishers. 1989. p. 387-434.
[6] B. Dushnik et E. W. Miller, Partially ordered sets. *Amer. J. Math.*, 63, 1941. p. 600-610.
[7] T. Hiraguchi. On the dimension of partially ordered sets. *Sci. Rep. Kanazawa Univ.*, 1, 1955. p. 77-94.
[8] N. Lygeros, Calculs exhaustifs sur les posets d'au plus 7 éléments. *Singularité.* 2. N° 4. 1991, p. 10-24.
[9] G. C. Rota. On the foundations of combinatorial theory-I : Theory of Möbius functions, *Zeitschrift Wahrscheinlichkeitstheorie*, 2, 1964. p. 340-368.
[10] P. Hall, A contribution to the theory of groups of prime power order, *Proceedings London Math. Soc.*, (II), 36, 1932. p. 39-95.