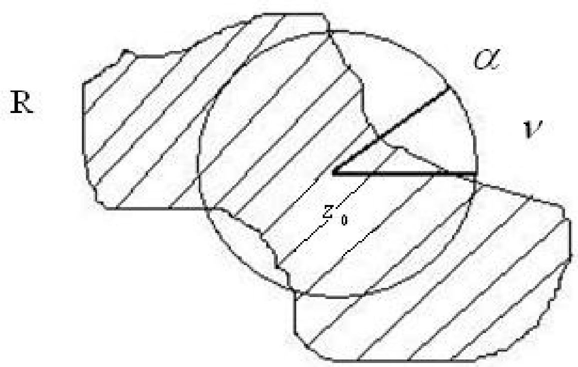
Inégalité de Lindelöf et approche de Carathéodory

N. Lygeros

Soit R un domaine multiplement convexe du plan complexe.

Soit un arc de cercle $|z-z_0|<r$ qui forme un angle $\alpha>\frac{2\pi}{n}$ à partit du centre z_0 et extérieur au domaine R.



En effectuant des rotations à partir du centre z_0 d'angles $\frac{2\pi}{n},\frac{4\pi}{n},....,\frac{2(n-1)\pi}{n}$, le domaine R engendre les domaines $R_1,R_2,...,R_{n-1}$ respectivement.

L'intersection de ces domaines est un ensemble ouvert qui contient le point z_0 mais qui n'a pas de point du cercle $|z-z_0|<r$ en tant qu'intérieur au bord. Parmi ces domaines dont la somme engendre l'intersection il en existe un R_0 qui contient le point z_0. La frontière γ se trouve à l'intérieur de la zone circulaire $|z-z_0|<r$ et tout point de γ est un point du bord d'au moins un des domaines $R_1,R_2,...,R_{n-1}$.

Soit $f(z)$ une fonction analytique bornée, définie dans R et telle que $|f(z)|<M$. Si ζ est un point du bord de R dans le domaine $|z-z_0|<r$ et si $z_1,z_2...$ est une séquence de points de R tendant vers ζ alors $\overline{\lim_{n->\infty}}|f(z_n)|\leq m$ $(m<M)$ où m est indépendant de la séquence particulière de $\{z_n\}$ et du choix de ζ .

Soient les fonctions $f_k(z)=f\left(z_0+e^{\frac{i2k\pi}{n}}(z-z_0)\right)$ avec $(k=1,2,...,(n-1))$

Comme la fonction $f_k(z)$ est analytique dans le domaine R_k nous en déduisons que la fonction $F(z) = f(z)f_1(z)....f_{n-1}(z)$ est analytique dans R_0.

Aussi nous avons $\overline{\lim_{n->\infty}}\left|F\left(z_n\right)\right| \leq M^{n-1}m$

Aussi en spécialisant le point, nous obtenons $\left|F\left(z_0\right)\right| \leq M^n \dfrac{m}{M}$

Comme $F(z_0) = \left(f\left(z_0\right)\right)^n$ on a $\left|f\left(z_0\right)\right| \leq M\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{n}}$

A partir de cette inégalité de Lindelöf, il est possible de déduire le théorème suivant, selon l'approche de Carathéodory.

<u>Théorème</u> : Si $f(z)$ est une fonction analytique dans un domaine simplement convexe R arbitraire dont la frontière contient plus d'un point et s'il y a une point du bord ζ avec un voisinage N_ς tel que $f(z)$ est continue sur ses points et points du bord de R qui est dans N_ς, qui prend une valeur constante α à ses points du bord, alors $f(z) \equiv \alpha$.