La théorie des somas de Carathéodory via la théorie des posets

N. Lygeros

Il est possible d'interpréter les somas de Carathéodory comme des posets particuliers. Ceci permet d'appréhender la théorie des somas via la théorie des posets. Cette approche se base sur l'équivalence de deux présentations axiomatiques de la théorie des somas. La démonstration de cette équivalence par Carathéodory suit la méthodologie hilbertienne. Carathéodory montre tout d'abord que les somas vérifient les axiomes des posets puis deux axiomes supplémentaires. Ensuite il démontre que les quatre axiomes considérés déterminent de manière univoque uniquement des somas. Enfin il démontre via des exemples de pseudosomas que ces axiomes sont indépendants. Aussi à partir de ces axiomes, Carathéodory nous permet d'accéder à la théorie des somas via la théorie des posets, ce qui rend possible des calculs effectifs sur les somas finis.

<u>Axiome 1a</u> : Tout système de somas A, B, ... forme un poset. Aussi la relation $A \subseteq B$ est vérifiée pour certaines paires d'éléments de telle façon à ce que les conditions suivantes soient satisfaites.

1. $X \subseteq X$ pour tout X (réflexion)
2. Si $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$ alors $A \subseteq C$ (transitivité)

Si $A \subseteq B$ alors A est un *sous-soma* de B et B est le *soma contenant* A.

<u>Axiome 1b</u> : La relation $A \subseteq B$ vérifie aussi les conditions suivantes :

3. Si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ alors $B = A$ (tiers exclus)
4. Il existe un soma 0 qui vérifie $0 \subseteq X$ pour tout X. Ce soma 0 est le *soma vide.*

<u>Définition 1</u> : Si $X \subseteq A$ et $X \subseteq B$ implique $X = 0$ alors A et B seraient dit *disjoints*. Le fait que A et B soient disjoints, est indiqué par le symbole $A \circ B$.

<u>Axiome 2a</u> : Pour tout couple de somas A et B, il existe un plus petit soma les contenant.

<u>Définition 2</u> : Le plus petit commun soma contenant A et B – qui est unique grâce à la condition 3 de l'axiome 1b, est l'union de A et de B et sera noté $A \dot{+} B$.

<u>Axiome 2b</u> : Pour toute suite infinie dénombrable de somas A_1, A_2,... il existe un plus petit commun soma contenant qui est l'union et qui est noté $\sum_i \dot{+} A_i$

<u>Axiome 3</u> : Pour tout triplet de somas A, B et C les relations $C \circ A$ et $C \circ B$ ensemble, impliquent la relation $C \circ \left(A \dot{+} B \right)$

Axiome 4 : Parmi les solutions X de l'équation $X \dot{+} A = A \dot{+} B$ il existe au moins une qui satisfasse $X \circ A$.

Ces axiomes permettent à Carathéodory de démontrer les théorèmes suivants :

Théorème 1 : $0 \circ X$ pour tout X.

Théorème 2 : Les règles suivantes sont vérifiées par l'union.

$A + 0 = A, A \dot{+} A = A, A \dot{+} B = B \dot{+} A$ (commutatitivé)

$A \dot{+} \left(B \dot{+} C \right) = \left(A \dot{+} B \right) \dot{+} C$ (associativité)

Théorème 3 : *$A \subseteq B$ équivaut à* $A \dot{+} B = B$.

Théorème 4 : *Si $X \circ A$ et $X \subseteq A$ alors $X = 0$.*

Théorème 5 : *Si $X \circ A$ et $A \subseteq B$ alors $X \circ A$.*

Théorème 6 : *Si $C \subseteq A \dot{+} B$ et $C \circ A$ alors $C \subseteq B$.*

Théorème 7 : Pour toute paire de somas A et B, nous pouvons assigner de manière unique la paire de somas X et Y qui vérifient toutes les relations

$$X \circ A,\ Y \subseteq A,\ X \dot{+} Y = B$$

Ici X est le plus grand soma qui vérifie *$X \circ A$ et $X \subseteq B$*, et Y est le plus grand soma qui vérifie *Y*

$A \subseteq$ et *$Y \subseteq B$*.

Théorème 8 : Soient A et B des somas quelconques. Il existe trois somas disjoints qui vérifient $A = T_1 \dot{+} T_3, B = T_1 \dot{+} T_2$ et ils sont déterminés ainsi de manière unique.