Vérification de la démonstration de Carathéodory

de l'indépendance des axiomes de la théorie des somas via la théorie des posets

N. Lygeros

- Les axiomes 2,3 et 4 présupposent l'axiome 1.
- Les sous-ensembles fermés de l'espace euclidien constituent un exemple de pseudo-somas qui vérifient les axiomes 1, 2a, 2b et 3 mais pas l'axiome 4. Car si B est continu et contient plus d'un point et si A est l'un de ses points alors il n'existe pas d'ensemble fermé X vérifiant $X \dot{+} A = A \dot{+} B$ et $X \circ A$.

- $m_0 = \{1,2,3\}$, $m(1) = \{1,2,3\}$, $m(2) = \{2\}$, $m(3) = \{3\}$

pseudo-somas

$$0 \sim m(1),\ A \sim m(2),\ B \sim m(3)$$

$$m(1) \nsucc m(2) \Rightarrow 0 \le A$$
$$m(1) \nsucc m(3) \Rightarrow 0 \le B$$
$$\left\{\begin{matrix} m(2) \nsucc m(3) \\ m(2) \nprec m(3) \end{matrix}\right. \Rightarrow A \circ B$$

Donc pas de somas contenant A et B. Ainsi l'axiome 1 n'implique pas l'axiome 2a.

- $m_0 = \{1,2,3,4,5\}$

$$A \sim m(2) = \{2,5\},\quad B \sim m(3) = \{3,5\},\ C \sim m(4) = \{4,5\}$$
$$0 \sim m(1) = \{1,2,3,4,5\} \quad D \sim m(5) = \{5\}$$

$$m(1) \succ m(2) \succ m(5) \Rightarrow 0 \le A \le D$$
$$m(1) \succ m(3) \succ m(5) \Rightarrow 0 \le B \le D$$
$$m(1) \succ m(4) \succ m(5) \Rightarrow 0 \le C \le D$$
$$B \dot{+} C \sim m(3) \cap m(4) = m(5) \sim D$$
$$C \dot{+} A \sim m(4) \cap m(2) = m(5) \sim D$$
$$A \dot{+} B \sim m(2) \cap m(3) = m(5) \sim D$$
$$\Rightarrow B \dot{+} C = C \dot{+} B = A \dot{+} B = D$$

$$\begin{cases} m(3) \nsucc m(4) \\ m(3) \nprec m(4) \end{cases} \Rightarrow B \circ C$$

$$\begin{cases} m(4) \nsucc m(2) \\ m(4) \nprec m(2) \end{cases} \Rightarrow C \circ A$$

$$\begin{cases} m(2) \nsucc m(3) \\ m(2) \nprec m(3) \end{cases} \Rightarrow A \circ B$$

En prenant X=B, nous avons $X \dot{+} A = A \dot{+} B$ et $X \circ A$ donc l'axiome 4 est vérifié.

Par contre $C\left(A \dot{+} B\right) \sim m(4) \bigcup \left(m(2) \bigcap m(3)\right) = m(4) \bigcup m(5) = m(4) \sim C \neq O$ ainsi l'axiome 3 n'est pas vérifié.