

**Επαλήθευση της απόδειξης του Καραθεοδωρή περι ανεξαρτησίας των  
αξιωμάτων της θεωρίας των Somas  
μέσω της θεωρίας των συνόλων μερικής διάταξης**

**N. Λυγερός**

- Τα αξιώματα 2, 3 και 4 προϋποθέτουν το αξίωμα 1.
- Τα υποσύνολα του ευκλείδειου χώρου αποτελούν ένα παράδειγμα των ψευδο-Somas που επαληθεύουν τα αξιώματα 1, 2a, 2b και 3 αλλά όχι το αξίωμα 4. Διότι αν B είναι συνεχής και εμπεριέχει περισσότερα από ένα σημείο και A είναι ένα από τα σημεία του τότε δεν υπάρχει κλειστό σύνολο X που επαληθεύει

$$X + A = A + B \text{ και } X \circ A.$$

- $m_0 = \{1, 2, 3\}$ ,  $m(1) = \{1, 2, 3\}$ ,  $m(2) = \{2\}$ ,  $m(3) = \{3\}$

ψευδο-Somas

$$0 \sim m(1), A \sim m(2), B \sim m(3)$$

$$m(1) \succ m(2) \Rightarrow 0 \leq A$$

$$m(1) \succ m(3) \Rightarrow 0 \leq B$$

$$\begin{cases} m(2) \neq m(3) \\ m(2) \neq m(3) \end{cases} \rightarrow A \cup B$$

Άρα δεν υπάρχουν Somas περιέχουν A και B. Κατά συνέπεια, το αξίωμα 1 δεν συνεπάγεται το αξίωμα 2a

- $m_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$A \sim m(2) = \{2, 5\}, \quad B \sim m(3) = \{3, 5\}, \quad C \sim m(4) = \{4, 5\}$$

$$0 \sim m(1) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad D \sim m(5) = \{5\}$$

$$m(1) \succ m(2) \succ m(5) \Rightarrow 0 \leq A \leq D$$

$$m(1) \succ m(3) \succ m(5) \Rightarrow 0 \leq B \leq D$$

$$m(1) \succ m(4) \succ m(5) \Rightarrow 0 \leq C \leq D$$

$$B \dot{+} C \dot{-} m(3) \cap m(4) = m(5) \dot{-} D$$

$$C \dot{+} A \dot{-} m(4) \cap m(2) = m(5) \dot{-} D$$

$$A \dot{+} B \dot{-} m(2) \cap m(3) = m(5) \dot{-} D$$

$$\Rightarrow B \dot{-} C = C \dot{+} B = A \dot{+} B = D$$

$$\begin{cases} m(3) \not\succeq m(4) \\ m(3) \not\prec m(4) \end{cases} \Rightarrow B \circ C$$

$$\begin{cases} m(4) \not\succeq m(2) \\ m(4) \not\prec m(2) \end{cases} \Rightarrow C \circ A$$

$$\begin{cases} m(2) \not\succeq m(3) \\ m(2) \not\prec m(3) \end{cases} \Rightarrow A \circ B$$

Παίρνοντας  $X=B$ , έχουμε

$$X \dot{+} A = A \dot{+} B \quad \text{και} \quad X \circ A \quad \text{άρα το αξίωμα 4 επαληθεύεται}$$

$$\text{Ενώ} \quad C \left( A \dot{+} B \right) \dot{-} m(4) \cup (m(2) \cap m(3)) = m(4) \cup m(5) = m(4) \dot{-} C \neq 0$$

συνεπώς το αξίωμα 3 δεν επαληθεύεται.