Sur les transformations de Möbius et le théorème de Carathéodory

N. Lygeros

C'est à Möbius (1790-1868) que nous devons la première étude des transformations qui portent désormais son nom. Le cadre de son étude était les recouvrements du plan complexe.

Considérons quatre nombres complexes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, satisfaisant la condition suivante : $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ et l'équation $w = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$.

.Si $\gamma = 0$ alors α et δ doivent être différents de zéro pour que la condition soit vérifiée. Dans ce cas, nous obtenons les deux équations équivalents : $w = \dfrac{\alpha}{\delta} z + \dfrac{\beta}{\gamma}$ et $z = \dfrac{\delta}{\alpha} z - \dfrac{\beta}{\alpha}$. Et nous avons une bijection entre le z-plan et le w-plan.

.Si $\gamma \neq 0$ alors nous avons une singularité, pour $z \neq -\dfrac{\delta}{\gamma}$ car il n'y a pas de représentation dans le plan complexe image. Par contre tous les autres points ont bien une image puisque

$$w - \frac{\alpha}{\gamma} = -\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)}{\gamma(\gamma z + \delta)} \neq 0$$

et l'équation $w = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ est équivalente à $z = \dfrac{-\delta w + \beta}{\gamma w - \alpha}$.

Ainsi en enlevant les points $z_0 = -\dfrac{\delta}{\gamma}$ et $w_0 = \dfrac{\alpha}{\gamma}$, nous avons de nouveau une bijection. Cette bijection, c'est la transformation de Möbius.

Comme la composition de deux transformations de Möbius est une transformation de Möbius, et que toute transformation de Möbius a un inverse, nous en déduisons que l'ensemble des transformations de Möbius constitue un groupe.

En effectuant une composition des transformations de Möbius avec $w = \alpha z$ et $w = z + \beta$, il est possible d'obtenir une forme plus générale des transformations de Möbius. En effet, en utilisant la transformation $w = \dfrac{1}{z}$, il est possible d'écrire

$$w = \frac{\alpha}{\gamma} + w_1 , \quad w_1 = \frac{1}{w_2}, \quad w_2 = \frac{-\gamma(\gamma z + \delta)}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

Et comme les transformations $w = \alpha z$ et $w = z + \beta$ transforment des droites en droites, et des cercles en cercles. Aussi il est aisé de voir que les transformations plus générales de Möbius transforment des droites en droites, et des cercles en cercles. Si de plus nous considérons la conjugaison, à savoir $w=\overline{z}$ et nous la composons avec une transformation générale de Möbius, nous obtenons une nouvelle classe de transformations i.e. $w=\dfrac{\alpha\overline{z}+\beta}{\gamma\overline{z}+\delta}\ (\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0)$, qui transforme, elle aussi, les droites en droites, et les cercles en cercles. La propriété géométrique de transformer des droites en droites, et des cercles en cercles dans le plan complexe, caractérise les transformations de Möbius élargies par les transformations $w=\dfrac{\alpha\overline{z}+\beta}{\gamma\overline{z}+\delta}$. Cette propriété tout à fait remarquable a été généralisée par Carathéodory de la manière suivante. Considérons l'intérieur d'un cercle K_0 du z-plan qui est transformé de manière bijective en un ensemble de points du w-plan, de telle manière que tout cercle K de l'intérieur du cercle K_0 est transformé en un cercle contenu dans l'ensemble A, alors le recouvrement est représenté soit par une transformation de Möbius, soit par une transformation du type $w=\dfrac{\alpha\overline{z}+\beta}{\gamma\overline{z}+\delta}$. Aussi elle doit préserver les cercles. Carathéodory a démontré ce résultat dans son article intitulé : The most general transformations of plane regions which transform circles into circles. Cet article a été publié dans le Bulletin of the American Mathématical Society. (vol.43, pp 573-579) en 1937. Aussi d'une certaine manière, Carathéodory a obtenu le résultat le plus général possible qui va dans le sens de la recherche initiale de Möbius et ce de façon relativement élémentaire.