Sur le caractère naturel de l'analyse complexe

N. Lygeros

L'analyse réelle comporte de fort beaux résultats. Cependant bien souvent ces derniers nous semblent quelque peu artificiels. Ce manque de naturel est tout à fait flagrant quand nous avons des problèmes de définitions. Ces considérations qui paraissent n'être que des généralités lorsque nous ne mentionnons pas les problèmes de la dérivation fractionnaire, ceux de la percolation, ceux de l'intégrale de Riemann que recouvre partiellement l'intégrale de Lebesgue ou encore des difficultés de la mesure mentionnées par Carathéodory. Dans tous les cas, ce qui est certain c'est que le plongement de la droite réelle dans le plan complexe rend les choses plus naturelles à bien des égards. Il ne s'agit pas seulement des remarquables calculs de limites effectués par Euler et Gauss. Le caractère naturel de l'analyse complexe prend corps avec le théorème intégral de Cauchy qui se généralise d'une part dans le cadre de la géométrie des surfaces de Riemann et d'autre part via le théorème des résidus. En effet si deux chemins différents relient les deux mêmes points et s'il existe une fonction holomorphe entre ces deux chemins, alors les deux intégrales de cette fonction suivant ces chemins sont égales. La première idée, c'est que ces deux chemins ne peuvent exister que dans le plan complexe. La droite réelle ne permet pas de faire émerger cette propriété. Mais ceci n'est que le point de départ. En effet le prolongement de ce théorème via celui des résidus met en évidence le caractère fondamental des singularités. Ces dernières qui n'étaient qu'un point de divergence dans le cadre de l'analyse réelle, deviennent les points d'information de l'ensemble de la structure intégrale. Mieux encore, ces singularités caractérisent désormais l'entité considérée. Ainsi l'analyse complexe montre où se trouve l'essentiel de l'information. En réalité, c'est justement ce caractère naturel qui donne tant de puissance et d'efficacité à l'analyse complexe. Les pôles z_k de la fonction $f(z)$ deviennent les points de références de toute l'intégrale curviligne.

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1} I(\gamma, z_k) \operatorname{Re} s(f, z_k)$$

Le point le plus intéressant de cette approche quant à l'analyse réelle, c'est qu'elle permet de calculer explicitement et de manière efficace, des intégrales réelles difficiles à manipuler du point de vue intrinsèque. Ceci s'effectue en exploitant le lemme de Jordan. De manière plus générale, cette approche a aussi permis de démontrer le théorème des nombres premiers. Sans pour autant dire que celle-ci était nécessaire comme l'affirmait Hardy via sa notion de profondeur, puisque Erdös a trouvé une preuve élémentaire de ce théorème. Par contre, la relation avec la fonction ζ de Riemann met en évidence tout l'intérêt de la recherche des zéros. L'analyse complexe est riche de l'hypothèse de Riemann qui représente actuellement une des conjectures les plus importantes des mathématiques. Cela revient à comparer les résultats suivants :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$$

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(xe^{-\sqrt{\frac{\ln(x)}{15}}}\right)$$

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(xe^{c\ln(x)^{\frac{3}{5}}(\ln\ln x)^{-\frac{1}{5}}}\right)$$

alors que sous l'hypothèse de Riemann, nous aurions :

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)$$

Ainsi l'analyse complexe n'a pas fini de montrer la puissance de son caractère naturel. En exploitant la notion de clôture algébrique, qui aurait pu prédire l'ampleur et la valeur des résultats qu'elle a offert à l'analyse réelle. Sa liberté d'action dans le plan complexe lui permet d'utiliser des outils qui étaient tout simplement inaccessibles auparavant.