Η μοναδικότητα της συνάρτησης Γ(x)

Ν. Λυγερός

Η γενίκευση στους πραγματικούς αριθμούς του παραγωντικού των φυσικών αριθμών, αποτελεί μια ειδική περίπτωση παρεμβολής, όπου δεν ισχύει η προσέγγιση του Newton, διότι τα σημεία είναι άπειρα και τα πολυώνυμα δεν επαρκούν για να τα καλύψουν. Το σπουδαίο της υπόθεσης είναι ότι δεν έχουμε ανάγκη τη γενίκευση στους μιγαδικούς αριθμούς, για να αποδείξουμε τη μοναδικότητα της συνάρτησης που καλύπτει όλα αυτά τα σημεία και που στην ουσία λύνει το πρόβλημα της κομψότητας του Chaitin που ανέδειξε τον προβληματισμό του Leibniz. Ακόμα και οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί επαρκούν. Αυτός ο ισχυρισμός βασίζεται στο θεώρημα του Bohr - Mollerup που δημοσιεύτηκε στην Κοπεγχάγη το 1922.

Θεώρημα: Η συνάρτηση Γ(x) είναι η μοναδική συνάρτηση ορισμένη και θετική στην περιοχή x>0 που επαληθεύει τις εξής συνθήκες:

1. Επαληθεύει τη συναρτησιακή εξίσωση Γ(x +1) = xΓ(x)
2. Είναι λογαριθμικά κυρτή.
3. Επαληθεύει Γ(1)=1.

Με άλλα λόγια, η συνάρτηση Γ(x) όχι μόνο λύνει αυτό το δύσκολο πρόβλημα αλλά είναι και μοναδική, πράγμα το οποίο είναι ιδιαίτερα σημαντικό σε άλλες εφαρμογές στην μιγαδική ανάλυση, στη θεωρία αριθμών αλλά και στις πιθανότητες, όπως το απέδειξε ο Gauss. Η συνάρτηση Γ(x) μπορεί βέβαια να εκφραστεί και ως αόριστο ολοκλήρωμα με τον εξής τρόπο:

$$\Gamma(\mathrm{x}) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

Η έλλειψη έκφρασης της Γ(x) μέσω κλασικών συναρτήσεων δυσκόλεψε τους μαθηματικούς των προηγουμένων αιώνων. Ο πρώτος που κατάφερε να δώσει μια ασυμτωτική εκτίμηση της συνάρτησης Γ(x), είναι ο περίφημος Γάλλος μαθηματικός de Moivre. $n! \sim C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$. Δεν μπόρεσε, όμως να βρει τη σταθερά C. Αυτό το επίτευγμα έγινε από τον Stirling μέσω του αναπτύγματος ln (n!). Άρα ο τύπος της εκτίμησης διαμορφώνεται ως εξής: n! $\sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$.

Αυτή η προσέγγιση της σταθεράς μπορεί να γίνει μέσω των ολοκληρωμάτων του Wallis:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx$$

Πιο αναλυτικά, μέσω της επαγωγής βρίσκουμε τα εξής αποτελέσματα:

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

$$W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

Η εκτίμηση του W_{2p} είναι $\sqrt{\frac{\pi}{4p}}$ και αυτό επαρκεί για την εύρεση της σταθεράς της εκτίμησης της συνάρτησης Γ(x). Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει και την εύρεση της τιμής του ολοκληρώματος του Gauss: $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Βέβαια η μέθοδος του Jacobi είναι πιο άμεση και η μέθοδος της θεωρίας των υπόλοιπων σε μιγαδική ανάλυση πιο αποτελεσματική. Αυτή, όμως επιτρέπει την αναγνώριση του γνωστικού πυρήνα στης συνάρτησης Γ(x).

Με ανάλογους υπολογισμούς βρίσκουμε άλλους δύο περίφημους τύπους που ενισχύουν τη μοναδικότητα της συνάρτησης Γ(x):

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad 0 < x < 1$$

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x)$$

Αυτές οι ιδιότητες εξηγούν και την πολλαπλή χρήση της Γ(x) από τον Καραθεοδωρή.