Μία ιδιότητα του μιγαδικού λογαρίθμου

Ν. Λυγερού

Ήδη η ύπαρξη του μιγαδικού λογαρίθμου είναι από μόνη της μια θεαματική ιδιότητα που δείχνει το μονοπάτι των πολλαπλοτήτων του Riemann. Αυτή η συμβολή προέρχεται από την πολυπλοκότητα του ορισμού. Διότι, όταν γενικεύουμε τον πραγματικό λογάριθμο στο μιγαδικό επίπεδο, δεν μπορούμε να διατηρήσουμε όλες τις ιδιότητές του. Μέσω της τυπολογικής έννοιας της συνεκτικότητας, μπορούμε να αποδείξουμε τα εξής θεωρήματα.

Θεώρημα μοναδικότητας: Πάνω σε κάθε ανοιχτό συνεκτικό, αν υπάρχει ένας συνεχής ορισμός του λογαρίθμου, είναι μοναδικός μέσω της σταθεράς $2ik\pi$. Έχουμε ένα φαινόμενο ανάλογο με τις υπερβατικές συναρτήσεις στους πραγματικούς αριθμούς.

Θεώρημα μη ύπαρξης: Σ' ένα ανοιχτό συνεκτικό που εμπεριέχει μια καμπύλη με δείκτη, γύρω από το μηδέν, δεν υπάρχει συνεχής ορισμός του λογαρίθμου. Είναι το φαινόμενο της μονοδρομίας. Το πρόβλημα δημιουργείται με τις κλειστές καμπύλες, διότι πρέπει να προσθέσουμε $2ik\pi$. Γι' αυτόν το λόγο, περιοριζόμαστε συνήθως στον κύριο ορισμό του μιγαδικού λογαρίθμου, που έχει και μια άμεση σχέση με τον πραγματικό λογάριθμο.

$$L(x+iy)=\ln(|x+iy|)+2i\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Αυτή η συνάρτηση είναι ολόμορφη πάνω στο σύνολο $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^2$ και συμπίπτει με τον πραγματικό λογάριθμο στο σύνολο $\mathbb{R}^{*+}$ όμως αυτός ο λογάριθμος δεν έχει μόνο θεωρητικές προεκτάσεις αλλά και πρακτικές επιπτώσεις, όπως στη θεωρία υπολοίπων στη μιγαδική ανάλυση.

Όπως και με το κλασικό ολοκλήρωμα, ο αλγόριθμος διαφέρει ριζικά από τις άλλες συναρτήσεις και μας αναγκάζει να αλλάξουμε μεθοδολογία. Έτσι, στην ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$$

που δεν είναι παρά η εφαρμογή της παραγώγισης του γινομένου, η γενική μεθοδολογία έχει την τάση να κατεβάζει το βαθμό για να πετύχει μια απλοποίηση. Ενώ το παράδειγμα της ολοκλήρωσης του λογαρίθμου αποτελεί στην ουσία αντιπαράδειγμα.

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x)-x+c$$

Στη θεωρία υπολοίπων στη μιγαδική ανάλυση έχουμε ανάλογο φαινόμενο που μας προσφέρει τεχνικές δυνατότητες. Αυτή η ιδιότητα είναι χρήσιμη σε μερικούς υπολογισμούς που συναντούμε και στο έργο του Καραθεοδωρή. Μέσω της θεωρίας υπολοίπων έχουμε το εξής θεώρημα:

Έστω $\int_0^\infty R(x)\ln(x)dx$ αν $\lim_{x\to\infty} xR(x) = 0$.

Τότε θέτοντας $g(z) = R(z)\ln(z)^2$ στο μιγαδικό ολοκλήρωμα, έχουμε το εξής αποτέλεσμα στο πραγματικό ολοκλήρωμα:

$$\int_0^\infty R(x)\ln(x)dx = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\sum_{w\ \pi o\lambda o s\ \tau o \upsilon\ \mathbb{R}} \mathrm{Re}\,s(g,w)\right) \text{ και}$$

$$\int_0^\infty R(x)dx = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\left(\sum_{w\ \pi o\lambda o s\ \tau o \upsilon\ \mathbb{R}} \mathrm{Re}\,s(g,w)\right)$$

Αυτό το θεώρημα δίνει έμφαση στον ειδικό ρόλο του λογαρίθμου μέσα σε αυτό το γενικό πλαίσιο.