

Ο Einstein και τα δομικά στοιχεία της θεωρίας της γενικής σχετικότητας
Ν. Λυγερός

«The theory of gravitational fields, constructed on the basis of the theory of relativity, is called the general theory of relativity. It was established by Einstein (and finally formulated by him in 1916), and represents probably the most beautiful of all existing physical theories. It is remarkable that it was developed by Einstein in a purely deductive manner and only later was substantiated by astronomical observations.»

Landau & Lifshitz

Η συμβολή του Καραθεοδωρή στη θεωρία της γενικής σχετικότητας είναι μεταγενέστερη από τη θεμελίωσή της, όπως το αποδεικνύει και η αναφορά των Landau και Lifshitz. Αυτή η αναφορά είναι εξωγενής σε σχέση με τη θεωρία. Ενώ, η ενδογενής ανάλυση των δομικών στοιχείων αποτελεί ένα ισχυρότερο επιχείρημα ακόμα και αν δεν είναι κατανοητό στους μη ειδικούς που δεν εξετάζουν το φορμαλισμό της θεωρίας. Ο τανυστικός λογισμός του Levi-Civita που έμαθε ο Einstein μέσω του φίλου του Grossmann εμπεριέχει ήδη τα μαθηματικά που θα χρησιμοποιήσει ο Καραθεοδωρή, για να λύσει μερικά ειδικά προβλήματα. Στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες υπάρχουν δύο τύποι διανυσμάτων και κατά συνέπεια υπάρχουν τρεις τύποι τανυστών δεύτερης τάξης.

$$A^{nk} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} A'^{lm}$$

$$A_{ik} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'_{lm}$$

$$A_k^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'_m{}^l$$

Για μεγαλύτερη τάξη θα έχουμε:

$$A_{ikl}^m = \frac{\partial x'^p}{\partial x^i} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^k} \frac{\partial x'^s}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^t} A'^t{}_{p\gamma s}$$

Για ένα γενικό μετασχηματισμό του τανυστή k_{ik} έχουμε τον τύπο σε σχέση με τον ορισμό e_{iklm}

$$e_{nrst} k_{ni} k_{nt} k_{sl} k_{im} = k e_{iklm}$$

Κατά συνέπεια ο μετασχηματισμός στις καμπυλόγραμμας συντεταγμένες έχει την εξής μορφή:

$$e_{iklm} = e'_{nrst} \frac{\partial x'^n}{\partial x^i} \frac{\partial x'^r}{\partial x^k} \frac{\partial x'^s}{\partial x^l} \frac{\partial x'^t}{\partial x^m} = e'_{iklm} J$$

όπου J είναι η Jacobian του μετασχηματισμού των συντεταγμένων x^i σε x'^i

Επομένως η παραγωγή γίνεται με τον εξής τρόπο:

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k$$

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k d \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} dx^l$$

Και μόνο όταν το δεύτερο μέρος μηδενίζεται έχουμε μια συμπεριφορά διανύσματος. Μέσω αυτού του πλαισίου, ο μετασχηματισμός των συμβόλων του Christoffel γράφεται ως εξής:

$$\Gamma_{kl}^i = \Gamma'_{np} \frac{\partial x'^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k} \frac{\partial x'^p}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m}$$

Άρα το σύμβολο του Christoffel έχει τη συμπεριφορά ενός τανυστή κάτω από γραμμικούς μετασχηματισμούς. Έτσι μπορούμε να συνδέσουμε το σύμβολο του Christoffel με το μετρικό τανυστή. Αντιλαμβανόμαστε, λοιπόν, ότι όλος ο φορμαλισμός που χρησιμοποιεί ο Καραθεοδωρή για να απαντήσει στις ερωτήσεις του Einstein προϋπήρχε στο δομικό στοιχείο της θεωρίας της γενικής σχετικότητας. Και αυτό έπρεπε να αποδείξουμε.