Ο κεντρικός πυρήνας της θεωρίας ομάδων

Ν. Λυγερός

Το θεώρημα του Cayley επαρκεί από μόνο του, για να αναδείξει τον κεντρικό πυρήνα της θεωρίας ομάδων, διότι αποδεικνύει ότι η μελέτη των πεπερασμένων ομάδων ερμηνεύεται ως μελέτη των υποομάδων της συμμετρικής ομάδας.

Θεώρημα του Cayley: Κάθε πεπερασμένη ομάδα είναι ισόμορφη με μια ομάδα μεταθέσεων.

Αυτό το θεώρημα μας επιτρέπει να δώσουμε μια παράσταση κάθε πεπερασμένης ομάδας μέσω μιας ομάδας μεταθέσεων. Μπορούμε, επιπλέον, να κάνουμε πιο συγκεκριμένα αυτή την παράσταση μέσω των πινάκων μεταθέσεων, οι οποίοι είναι τετραγωνικοί πίνακες που έχουν σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη όλα τα στοιχεία τους μηδενικά, εκτός από ένα, που είναι η μονάδα.

Θεώρημα: Κάθε ομάδα μεταθέσεων είναι ισόμορφη με μια ομάδα με στοιχεία πίνακες μεταθέσεων.

Ο ισομορφισμός ορίζεται με τον εξής τρόπο:

για κάθε $\mu \in S_n$ έχουμε:

$\varphi : \mu \to M = \left(\mu_{ij}\right)$ όπου $\mu_{ij} = \delta^{i}_{\mu(j)}$ με $i, j = 1...n$

όπου δ^{j}_{l} είναι το σύμβολο του Kronecker.

Κατά συνέπεια, τα εξής θεωρήματα αποκτούν μεγαλύτερη σημασία μέσα σε αυτό το πλαίσιο του κεντρικού πυρήνα.

Θεώρημα: Κάθε μετάθεση εκφράζεται σαν γινόμενο ανταλλαγών.

Θεώρημα: Η συμμετρική ομάδα S_n γεννιέται από τις n-1 ανταλλαγές (12),(13),…(1n) .

Θεώρημα: Κάθε μετάθεση μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο διακεκριμένων κύκλων.

Το ενδιαφέρον αυτού του τελευταίου θεωρήματος είναι ότι το γινόμενο αυτό είναι μοναδικά ορισμένο, όταν δεν λαμβάνεται υπόψη η σειρά των κύκλων. Αυτή η ιδιότητα είναι ανάλογη με το θεώρημα των πρώτων αριθμών.

Ως εφαρμογή αυτού του πλαισίου, μπορούμε να εξετάσουμε το παράδειγμα της εναλλάσουσας ομάδας A_n. Για αυτήν την μελέτη χρειαζόμαστε τον εξής ορισμό: μια μετάθεση μ ονομάζεται άρτια αν $\varepsilon(\mu) = +1$ στη σχέση $P\left(\mu(x)\right) = \varepsilon(\mu) P(x)$ ενώ αν $\varepsilon(\mu) = -1$ ονομάζεται περιττή, όπου: $P\left(\mu(x)\right) = \prod_{1 \le i < j \le n} \left(x_i - x_j\right)$

Το σύνολο όλων των αρτίων μεταθέσεων ενός συνόλου Χ με #Χ=n, ονομάζεται εναλλάσουσα ομάδα A_n

<u>Θεώρημα</u>: Η εναλλάσουσα ομάδα A_n γεννιέται από τους
n-2 3 – κύκλους (123),(124),….(12n)

Αυτή η ειδική περίπτωση δεν είναι αντιπροσωπευτική, διότι η εναλλάσουσα ομάδα έχει άμεση σχέση με την συμμετρική ομάδα. Δίνει όμως μία τάση, όσον αφορά στην παράσταση των ομάδων μέσω του θεωρήματος του Cayley. Επιπλέον, ακόμα και πρακτικά, η παράσταση αυτή δίνει χρήσιμα συμπεράσματα, όταν η τάξη δεν είναι μεγάλη. Ένα εντυπωσιακό παράδειγμα αυτής της εφαρμογής είναι η ομάδα των κοτέρνιων. Αυτή η μη αντιμεταθετική ομάδα ορίζεται με τον εξής τρόπο, μέσω των συμβόλων $\{1,-1,i,-i,j,-j,k,-k\}$ και των
σχέσεων: $i^2=j^2=k^2=-1, ij=k, jk=i, ki=j$

Αν εξετάσουμε τώρα την παράσταση, στα στοιχεία i, j αντιστοιχούν οι μεταθέσεις

$$\mu_i=\begin{pmatrix}1 & -1 & i & -i & j & -j & k & -k\\ i & -i & -1 & 1 & k & -k & -j & j\end{pmatrix}$$

$$\mu_j=\begin{pmatrix}1 & -1 & i & -i & j & -j & k & -k\\ j & -j & -k & k & -1 & 1 & i & -i\end{pmatrix}$$

άρα το γινόμενο των στοιχείων i, j δηλαδή ij=k αντιστοιχεί η μετάθεση

$$\mu_i\mu_j=\mu_{ij}=\begin{pmatrix}1 & -1 & i & -i & j & -j & k & -k\\ k & -k & j & -j & -i & i & -1 & 1\end{pmatrix}$$