Αριστερά συνσύνολα και κανονικές υποομάδες

N. Lygeros

Μέσω της έννοιας της G- δράσης μπορούμε να ερμηνεύουμε τα συνσύνολα.

<u>Ορισμός</u>: Έστω H μια υποομάδα της $(G,.)$, τότε κάθε σύνολο της μορφής $xH = \{xh / h \in H\}$ όπου $x \in G$ ονομάζεται αριστερό συνσύνολο με αντιπρόσωπο το x. Ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε και το δεξιό συνσύνολο με τη μορφή $Hx = \{hx / h \in H\}$. Το αριστερό συνσύνολο xH αποτελεί στην ουσία την τροχιά του στοιχείου x της δεξιάς H-δράσης επί του G. Και το ανάλογο γίνεται με το δεξιό συνσύνολο. Κατά συνέπεια, έχουμε ένα διαμερισμό του G μέσω των κλάσεων xH και Hx. Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε και τη σχέση $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha^{-1}\beta \in H$ που αποτελεί μια ισοδυναμία στην αριστερή διαμέριση. Και αν ορίσουμε [G:1]= #G την τάξη της ομάδας τότε $[G:H]$ είναι ο δείκτης της H στην G και αντιπροσωπεύει το πλήθος των αριστερών συνσυνόλων της υποομάδας H της G. Είναι μάλιστα αυτός ο συμβολισμός που μας επιτρέπει να ερμηνεύσουμε το θεώρημα του Lagrange με τον εξής τρόπο: $[G:1] = [G:H][H:1]$

Η έννοια της κανονικής υποομάδας συγκεντρώνει πολλές ιδιότητες που εξηγούν και την πολλαπλή ονομασία της. Έτσι η κανονική υποομάδα ονομάζεται και αναλλοίωτη ή και αυτοσυζυγής της G. Η κανονική υποομάδα υπάρχει όταν $xH = Hx \ \forall x \in G$ και συμβολίζεται ως εξής $H \Delta G$. Είναι δυνατόν, λοιπόν, να ερμηνεύσουμε αυτήν την έννοια μέσω των συνσυνόλων. Η κανονική υποομάδα ισοδυναμεί με την ισότητα των αριστερών και δεξιών συνσυνόλων.

<u>Ορισμός</u>: Έστω S υποσύνολο της ομάδας G, τότε το σύνολο $N_G(S) = \{g \in G / gSg^{-1} = S\}$ είναι ο κανονικοποιητής της S.

Αν το S αποτελείται από ένα μοναδικό στοιχείο, τότε λέγεται κεντροποιητής του α και συμβολίζεται $C_G(a) = \{g \in G / g\alpha = \alpha g\}$. Ο κεντροποιητής της G ονομάζεται κέντρο και συμβολίζεται $Z(G) = \{x \in G / xg = gx, \forall g \in G\}$

Το κέντρο $Z(G)$ είναι η μεγαλύτερη υποομάδα της ομάδας G, της οποίας τα στοιχεία αντιμετατίθενται με όλα τα στοιχεία της ομάδας G. Επιπλέον, αν $f : G \to G^*$ τότε ο πυρήνας
Ker(f) είναι κανονική υποομάδα της ομάδας G.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $H \Delta G$ τότε τα αριστερά συνσύνολα της H στην G με γινόμενο το εξής: $zH.gH = xgH$.

Η ομάδα αυτή η ονομάζεται ομάδα πηλίκου της G δια της H και συμβολίζεται με G/H. Το νοητικό σχήμα της απόδειξης είναι το εξής:

- Η πράξη είναι καλά ορισμένη.
- Η πράξη είναι προσεταιριστική, διότι ανάγεται στην προσεταιριστικότητα του γινομένου της G.
- Το μοναδικό στοιχείο είναι το συνσύνολο $aH = H$
- Αντίστροφο στοιχείο του συνσυνόλου aH είναι το συνσύνολο $a^{-1}H$.

<u>Ορισμός</u>: Έστω HΔG, τότε η απεικόνιση $\varphi : G \to G/H : x \to xH$ είναι ομομορφισμός και ονομάζεται κανονικός ομομορφισμός.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $f : G \to H$ ένας ομομορφισμός ομάδων και $N \Delta G$ τέτοια ώστε $N \subset Ker(f)$. Τότε υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση $f' : G/N \to H$ τέτοια ώστε να είναι αντιμεταθετικό το διάγραμμα.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & G/N \arrow[d, "f'"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Επιπλέον η f' είναι αμφιμονοσήμαντη αν και μόνο αν $N = Ker(f)$