# Θεώρημα του Lagrange και θεώρημα του Sylow

N. Lygeros

Στις πεπερασμένες ομάδες το θεώρημα του Lagrange αποτελεί μια αναγκαία συνθήκη και όχι μια ικανή, διότι δεν εξασφαλίζει ότι υπάρχει όντως μια υποομάδα τάξης ενός δεδομένου διαιρέτη της τάξης της ομάδας. Σε αυτό το αναπάντητο ερώτημα έδωσε έμφαση η έρευνα του Sylow, που θα εξετάσουμε αναλυτικά.

<u>Ορισμός</u>: Έστω p πρώτος αριθμός, τότε η ομάδα $(G,.)$ θα ονομάζεται p- ομάδα αν $\#G = p^m$ όπου m είναι φυσικός αριθμός.

- Αν $H$ είναι υποομάδα της G τότε η H θα λέγεται p-υποομάδα. Αν είναι μια p- ομάδα.
- Αν μια υποομάδα H έχει τάξη $p^m$ όπου $n = p^m.n'$ και ο p δεν διαιρεί τον $n'$ τότε η H ονομάζεται υποομάδα του Sylow. Με άλλα λόγια, η υποομάδα του Sylow έχει τάξη τη μεγαλύτερη δύναμη του p.

<u>Λήμμα</u>: Αν G είναι μια p- ομάδα που δρα στο σύνολο $X$ και $X_0$ είναι το σύνολο των σθεναρών σημείων από τη G- δράση τότε $\# X = \# X_0[p]$.

<u>Θεώρημα του Sylow I</u>: Κάθε ομάδα G έχει p- υποομάδες του Sylow και κάθε p- υποομάδα της G περιέχεται σε μια p- υποομάδα του Sylow.

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό όλων των p-υποομάδων του Sylow είναι ότι είναι συζυγείς. Όμως όλη η αποτελεσματικότητα της προσέγγισης του Sylow εμφανίζεται στα εξής θεωρήματα:

<u>Θεώρημα του Sylow II</u>: Αν $\Sigma = S_1,...,S_r$ είναι το σύνολο όλων των p- υποομάδων του Sylow της G, τότε $r \equiv 1[p]$.

<u>Θεώρημα του Sylow III</u>: Ο αριθμός των p- υποομάδων του Sylow διαιρεί την τάξη της ομάδας.

Αυτές οι δύο συνθήκες $r \equiv 1[p]$ και $r / n$ μας προσφέρουν δυνατότητες που δεν είχε το θεώρημα του Lagrange. Διότι το αποτέλεσμα δεν είναι μόνο θεωρητικό. Η ικανή συνθήκη έχει πρακτικές επιπτώσεις, εφόσον η εφαρμογή της αποδεικνύει και την ύπαρξη ανάλογης υποομάδας. Επιπλέον, ο συνδυασμός των δύο συνθηκών δίνει ένα αποτελεσματικό τρόπο εύρεσης των τάξεων των υποομάδων. Αντιλαμβανόμαστε, λοιπόν, ότι υπάρχει μια ριζική διαφορά μεταξύ θεωρήματος του Lagrange και θεωρήματος του Sylow. Αυτό φαίνεται και από τις ημερομηνίες των ανακαλύψεων αυτών των θεωρημάτων: 1771 και 1872. Αυτή η διαφορά ενός αιώνα δεν είναι μια απλή λεπτομέρεια. Εξηγείται, βέβαια, και από τη θεμελίωση της ομάδων από τον Galois, από τη συμβολή του Abel και την ανάλυση του Liouville. Βλέπουμε, επίσης, ότι συνδυάζεται και με τις μαθηματικές σχολές της Γαλλίας και της Νορβηγίας, εφόσον ο Lagrange και ο Galois ήταν Γάλλοι, ενώ ο Abel και ο Sylow ήταν Νορβηγοί. Υπάρχει, λοιπόν, μια συμμετρία και στον μαθηματικό και στον ιστορικό τομέα. Σε κάθε περίπτωση, είναι πλέον κατανοητό ότι αυτά τα θεωρήματα που λειτουργούν συμπληρωματικά αποτελούν θεμελιακά στοιχεία για τη θεωρία ομάδων. Δίνουν ένα αποτελεσματικό παράδειγμα που πρέπει να ακολουθήσουμε και σε άλλους τομείς, πιο γενικούς, όπως τη θεωρία των υπερομάδων, όπου το θεώρημα του Lagrange δεν ισχύει ή τη θεωρία των loops όπου έχουμε ανάλογα αποτελέσματα μέσω της προσέγγισης της Moufang. Διότι, το θεώρημα του Lagrange και το θεώρημα του Sylow αποτελούν ένα ισχυρό νοητικό σχήμα.