Somas του Καραθεοδωρή ως κλάσεις συνόλου

Ν. Λυγερός

Μια από τις αποτελεσματικότερες και πρακτικές μεθόδους για τη μελέτη των somas του Καραθεοδωρή, είναι να τα παριστάνουμε ως κλάσεις συνόλου, όπου μπορούμε να χρησιμοποιούμε το ισχυρό εργαλείο του διαμερισμού. Ο ίδιος ο Καραθεοδωρή εκμεταλλεύτηκε αυτήν την προσέγγιση στο βιβλίο του κορυφή, όπου αλγεβροποίησε τη θεωρία μέτρου και τη θεωρία ολοκληρωμάτων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο διαμερισμός είναι κλασικός και το πλήθος των κλάσεων δεν πρέπει να είναι απαραίτητα πεπερασμένο ή άπειρο. Αυτό επιτρέπει τη χρήση του επόμενου θεωρήματος:

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $C(a)$, η κλάση που εμπεριέχει το στοιχείο a του *M0*. έχουμε λοιπόν $a \in C(a)$ και αν $b \in C(a)$ τότε $C(b) = C(a)$.

Εάν το υποσύνολο $C(a)$ του συνόλου *M0* έχει οριστεί έτσι ώστε να ισχύουν οι προηγούμενες σχέσεις, τότε τα σύνολα $C(a)$ αποτελούν ένα διαμερισμό του *M0* σε κλάσεις. Η ίδια προσέγγιση μας δίνει πρόσβαση στο εξής γενικότερο θεώρημα:

<u>Θεώρημα</u>: Έστω *M0* και $M_0^{'}$ δύο σύνολα που εμπεριέχουν το πρώτο το στοιχείο a και το δεύτερο το στοιχείο α' όπου τα σύνολα *M0* και $M_0^{'}$ μπορεί να συμπίπτουν. Σε κάθε στοιχείο aστο *M0* αντιστοιχεί ένα υποσύνολο $P^{'}(a)$ του $M_0^{'}$. Εάν $C(a)$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία b στο *M0* που επαληθεύουν $P^{'}(b) = P^{'}(a)$ τότε τα σύνολα $C(a)$ αποτελούν ένα διαμερισμό του *M0* σε κλάσεις.

Έστω ένα διαμερισμό του συνόλου *M0* σε $C(a)$ κλάσεις και N ένα μη κενό υποσύνολο. Εάν για κάθε στοιχείο $a \in N$ θέσουμε το υποσύνολο $C_1(a) = NC(a)$, θα έχουμε ένα διαμερισμό του υποσυνόλουN σε κλάσεις. Κάθε κλάση $C_1(a)$ είναι ένα υποσύνολο της κλάσης$C(a)$. Εάν $C_1(a) = C(a)$ για κάθε a που ανήκει στο N ,τότε N είναι η ένωση των κλάσεων$C(a)$.

<u>Θεώρημα:</u> Σε κάθε υποσύνολο N του*M0* μπορούμε να καθορίσουμε μια ελάχιστη ένωση M των κλάσεων $C(a)$, οι οποίες εμπεριέχουν N ως ένα υποσύνολο. Το σύνολοM αποτελείται από όλα τα στοιχεία a του *M0* για τα οποία $NC(a)$ δεν είναι κενό.

Μέσα σε αυτό το πλαίσιο, έχουμε τη δυνατότητα να αντιστοιχίσουμε το διαμερισμό με τις κλάσεις ισοδυναμιών με τον εξής τρόπο:

1. $a \in C(a)$
2. Εάν $b \in C(a)$ και $b \in C(c)$ τότε $c \in C(a)$
3. Εάν $b \in C(a)$ τότε $C(b) \prec C(a)$.

Κατά συνέπεια, το *M0* μπορεί να διαμεριστεί μέσω των κανονικών ισοδυναμιών. Πιο σημαντικό ακόμα είναι ότι μπορούμε να θεωρήσουμε τώρα κάθε μια από τις κλάσεις $C(a), C(b)$ ως ένα μοναδικό μαθηματικό ον.

Έτσι αν θέσουμε $A = C(a)$, τότε τα στοιχεία $a, a^{'}$ του $C(a)$ είναι οι αντιπρόσωποι του *A*. Με αυτήν τη μέθοδο μπορούμε να δημιουργήσουμε προεκτάσεις. Αυτή η δυνατότητα είναι δυναμική για τη θεωρία των Somas του Καραθεοδωρή, διότι έχουμε
έναν $M_i = m_i \, (i = 1, 2, ...)$ τότε $\sum_i \dot{+} M_i \sim \sum_i \dot{+} m_i$, $M_1 \circ M_2 \Leftrightarrow m_1 \circ m_2$, ,
$M_1 \prec M_2 \Leftrightarrow m_1 \prec m_2, \prod_i M_i \sim \prod_i m_i$,
$M_1 - M_1 M_2 \sim m_1 - m_1 m_2$