Δυναμικές προσεγγίσεις της εξίσωσης του Riccati

Ν. Λυγερός

Ο μαθηματικός Riccati (1707-1775) έγινε διάσημος με την εξίσωση που φέρει τώρα το όνομά του.

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x).y + R(x)y^2$$

Αν η συνάρτηση $y_1(x)$ επαληθεύει την εξίσωση του Riccati, τότε κάθε λύση πρέπει να έχει την εξής μορφή $y = y_1 + u$, όπου u είναι λύση της εξίσωσης του Bernouilli

$$\frac{du}{dx} - (Q + 2Ry_1)u = Ru^2$$

Έστω $u = \frac{1}{v}$ τότε $y = y_1 + \frac{1}{\upsilon}$ όπου

$$\frac{dv}{dx} + \left(Q + 2Ry_1\right)v = -R$$

Οι λύσεις αυτής της εξίσωσης έχουν την εξής μορφή $v = cv_1 + v_2$. Κατά συνέπεια, η λύση της αρχικής εξίσωσης έχει την εξής μορφή:

$$y = \frac{cv_1y_1 + v_2y_1 + 1}{cv_1 + v_2}$$

Αν προσεγγίσουμε διαφορετικά την εξίσωση του Riccati, θα έχουμε τα ακόλουθα βήματα. Εδώ αλλάζουμε τη γραφή της, για να αναδείξουμε τη διαφορά.

Έστω $y(x) = P(x)y^2(x) + Q(x)y(x) + R(x)$

όπου $P(x), Q(x)$ και $R(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και $P(\alpha) \neq 0$. Αν το x ανήκει σε ένα τμήμα που εμπεριέχει το α, θα έχουμε

$$u(x) = e^{-\int_x^{\alpha} P(t)y(t)dt} \qquad \text{και} \qquad y(x) = \frac{-1}{P(x)}\frac{u^{'}(x)}{u(x)}$$

Τότε η εξίσωση του Riccati ισχύει αν και μόνο αν $u(a)=1$ και

$$\frac{-Pv'v''-P'vv'-Pv'^2}{P^2v^2}=\frac{1}{P}\frac{v'^2}{v^2}-\frac{Qv'}{Pv}+R$$

ή αλλιώς: $u(a)=1$ και $Pu''-(P'+PQ)u'+P^2Rv=0$

Ἕστω $U_1(x)$ και $U_2(x)$, οι θεμελιώδεις λύσεις αυτής της εξίσωσης, όπου
$U_1(\alpha)=0,\quad U_1^{'}(\alpha)=1,\quad U_2^{'}(\alpha)=1\quad \kappa\alpha\iota\quad U_2^{'}(\alpha)=0$

τότε η εξίσωση του Riccati ισχύει αν και μόνο αν για κάθε σταθερά c, έχουμε
$u(x)=cU_1(x)+U_2(x)$

Άρα η εξίσωση του Riccati ισχύει αν και μόνο αν

$$y(x)=\frac{-1}{P(x)}.\frac{cU_1(x)+U_2^{'}(x)}{cU_1(x)+U_2(x)}$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι: $c=u'(a)=-y(a)P(a)$

Κατά συνέπεια, κάθε λύση της εξίσωσης του Riccati έχει τη μορφή:

$$y=\frac{cf_1(x)+f_2(x)}{cf_3(x)+f_4(x)}$$

Αν εξετάσουμε την ειδική περίπτωση: $\frac{x}{2}y'+xy^2+y=1$ μπορούμε να τη μετασχηματίσουμε μέσω: $y=\frac{z'}{2z}, z=z(x)$ σε $xz''+2z'-4z=0$.

Κατόπιν μέσω του μετασχηματισμού: $z(x)=x^{\alpha}f\left(\eta\right)$ και $\eta=\gamma x^{\beta}$, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις σταθερές α, β και γ έτσι ώστε $yf(\eta)$ να ικανοποιεί την τροποποιημένη διαφορική εξίσωση Bessel, δηλαδή

$$\eta^2\frac{d^2f(\eta)}{d^2\eta}+\eta\frac{df(\eta)}{dn}+(\eta^2-n^2)f(\eta)=0$$

Οι λύσεις αυτής της εξίσωσης είναι οι συναρτήσεις Bessel.

Με αυτές τις δυναμικές προσεγγίσεις, κατανοούμε βαθύτερα τη συμβολή της εξίσωσης του Riccati στον τομέα των διαφορικών εξισώσεων.