Διαφορική εξίσωση του Laplace και μέθοδος χωρισμένων μεταβλητών

Ν. Λυγερός

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες, η διαφορική εξίσωση του Laplace παίρνει τη μορφή:

$\mathcal{U}_{rr}+\mathcal{U}_{r}+\frac{1}{r^2}\mathcal{U}_{\varphi\varphi}+\mathcal{U}_{zz}=0$ όπου $\mathcal{U}=\mathcal{U}\left(r,\varphi,z\right)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση.

Μέσω της μεθόδου χωρισμένων μεταβλητών έχουμε το εξής :

$$F.Z.\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}F.Z\frac{dR}{dr}+\frac{1}{r^2}R.Z.\frac{d^2F}{d\varphi^2}+\frac{RFd^2Z}{dz^2}=0$$

όπου $\mathcal{U}\left(r,\varphi,z\right)=R(z).F(\varphi).Z(z)$.

Εάν $R\cdot F\cdot Z\neq 0$, έχουμε την εξίσωση :

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{1}{R}\frac{dR}{dr}+\frac{1}{r^2}.\frac{1}{F}.\frac{d^2F}{d\varphi^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=0$$

Δηλαδή :

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{1}{R}\frac{dR}{dr}+\frac{1}{r^2}.\frac{1}{F}.\frac{d^2F}{d\varphi^2}=-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}$$

Αυτό σημαίνει ότι:

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{1}{R}\frac{dR}{dr}+\frac{1}{r^2}.\frac{1}{F}.\frac{d^2F}{d\varphi^2}=\mathcal{L}(r,\varphi)$$

και

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=g(z)$$

Κατά συνέπεια : $\frac{dg(z)}{dz}=0$ άρα $g(z)$ είναι σταθερή

οπότε : $-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=c_1$

Επομένως έχουμε :

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{1}{R}\frac{dR}{dr}+\frac{1}{r^2}.\frac{1}{F}.\frac{d^2F}{d\varphi^2}=c_1$$

Πολλαπλασιάζοντας με r^2 έχουμε :

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\frac{dR}{dr}+\frac{1}{F}.\frac{d^2F}{d\varphi^2}=c_1r^2$$

ή αλλιώς :

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\frac{dR}{dr}-c_1r^2=-\frac{1}{F}.\frac{d^2F}{d\varphi^2}$$

Με την ανάλογη παρατήρηση έχουμε το εξής :

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\frac{dR}{dr}-c_1r^2=h(r)$$

και

$$-\frac{1}{F}.\frac{d^2F}{d\varphi^2}=i(\varphi)$$

Κατά συνέπεια είναι σταθερά και τα δύο μέλη της εξίσωσης.

Έχουμε λοιπόν : $\frac{d^2F}{d\varphi^2}+c_2F=0$

και

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{dR}{dr}-(c_1r^2+c_2)R=0$$

Η πρώτη διαφορική εξίσωση είναι απλή και έχει λύσεις της ακόλουθης μορφής:
$F(\varphi)=A.\sin(m\varphi)+B\cos(m\varphi)$ όπου $m^2=c_2$.

Η δεύτερη εξίσωση εμπεριέχει την ουσία του προβλήματος και είναι η εξίσωση του Bessel.

Αυτή η μεθοδολογία που είναι πλέον κλασική, χρησιμοποιήθηκε πολλές φορές από τον Καραθεοδωρή για ευνόητους λόγους. Αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα της μαθηματικής του μεθοδολογίας. Έχει τις ιδιότητες που αγγίζουν το πνεύμα του Καραθεοδωρή. Υπάρχει μία γενική προσέγγιση που χρησιμοποιεί όσο δυνατόν λιγότερα στοιχεία για να καθοριστεί το όλο πλαίσιο. Αυτήν την αξιωματική προσέγγιση εκμεταλλεύτηκε και στη σχετικότητα και στη θερμοδυναμική, αλλά ακόμα περισσότερο στην αλγεβροποίηση της θεωρίας μέτρου. Βέβαια, η άμεση και φυσιολογική εφαρμογή αυτής της μεθόδου βρίσκεται στη θεωρία του λογισμού μεταβολών που ερευνά βαθύτερα τον κόσμο των διαφορικών εξισώσεων.