Το υπόβαθρο του Καραθεοδωρή στον λογισμό μεταβολών

Ν. Λυγερός

Ένας από τους αποτελεσματικότερους τρόπους για να ερευνήσουμε το υπόβαθρο του Καραθεοδωρή στο λογισμό μεταβολών είναι να αναλύσουμε παραδείγματα ανάλογα με το αρχικό πρόβλημα του Bernoulli. Με αυτή τη μέθοδο είναι δυνατόν να εξετάσουμε τις τεχνικές που υπάρχουν πριν τη συμβολή του Καραθεοδωρή σε αυτόν τον τομέα. Το επόμενο παράδειγμα θα μας βοηθήσει σε αυτήν την προσπάθεια. Θέλουμε να βρεθεί η τροχιά που ακολουθεί ένα σώμα με μάζα m που κινείται κάτω από την ίδια επίδραση του δυναμικού

$$v = -\frac{c^2}{\alpha + y} + \frac{c^2}{\alpha}$$

ξεκινώντας με ταχύτητα μέτρου $v_1 = \sqrt{\frac{2}{m\alpha}C}$ από το σημείο 1 (0,0) και φτάνοντας στο $2(x_1, x_2)$. Η αρχική κλίση της καμπύλης, ίσης με το λόγο των αρχικών ταχυτήτων όπου y και x άξονες, είναι $y'(0) = y'_0$. Μέσω του κλασικού ορισμού της ταχύτητας $v = \frac{ds}{dt}$, προκύπτει ότι ο χρόνος για την κίνηση από το σημείο 1 στο σημείο 2 είναι

$$t_{1\to 2} = \int_1^2 \frac{ds}{v}$$

Με την αρχή της διατήρησης της ενέργειας έχουμε:

$$\frac{1}{2}mv^2 = v_1 - v + \frac{1}{2}mv_1^2$$

Αν αντικαταστήσουμε το δυναμικό V με την τιμή $-\frac{c^2}{\alpha + y} + \frac{c^2}{\alpha}$ βρίσκουμε το εξής:

$$-\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{c^2}{\alpha + 0} + \frac{c^2}{\alpha} + \frac{c^2}{\alpha + y} - \frac{c^2}{\alpha} + \frac{1}{2}m.\frac{2}{m\alpha}C^2$$

Άρα:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{c^2}{\alpha + y}$$

Επομένως:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}}c.\frac{1}{\sqrt{\alpha + y}}$$

Στον ευκλείδειο χώρο έχουμε: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$ όπου $y' = \frac{dy}{dx}$

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε το εξής τέχνασμα:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

διότι η συνάρτηση f εξαρτάται από μία μόνο μεταβλητή, επομένως $dx=\partial x$ άρα $\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y}.\partial x-\frac{\partial f}{\partial y}=0$.

Εάν θέσουμε :

$f=\frac{ds}{dxv}$ έτσι ώστε $\frac{ds}{v}=f.dx$

θα έχουμε:

$$f=\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{c}\sqrt{(1+y'^2)(\alpha+y)}$$

Κατά συνέπεια η διαφορική εξίσωση του τεχνάσματος μετατρέπεται ως εξής:

$$2(\alpha+y)y''-y'^2-1=0$$

Αν παραγωγίσουμε αυτήν την εξίσωση προς x βρίσκουμε:

$$2y'.y''+2(\alpha+y)-2y''.y'=0$$

Άρα $y'''=0$, επομένως $y''=$ σταθερά και συνεπώς η συνάρτηση y είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού. Έχει την εξής μορφή:

$$y(x)=\frac{\beta}{2}x^2+\gamma x+\delta$$

$$y'(x)=\beta x+\gamma$$

Όπως $y(0)=0$ συνεπάγεται $\delta=0$

ενώ $y'(0)=y_0^{'}$ συνεπάγεται $\gamma=y_0^{'}$

άρα $2(\alpha+0)\beta-y_0^{'2}-1=0$

επομένως:

$$\beta=\frac{1+y_0^{'2}}{2a}$$

Τελικά έχουμε: $y(x)=\frac{1+y_0^{'2}}{4\alpha}x^2+y_0^{'}x$

Με αυτόν τον παραδειγματικό τρόπο καταφέραμε να ολοκληρώσουμε $t_{1\to 2}=\int_1^2\frac{ds}{v}$

δίχως ιδιαίτερη δυσκολία.