Η διαφορική εξίσωση Euler-Lagrange στο λογισμό μεταβολών

Ν. Λυγερός

Ένα από τα θεμελιακά εργαλεία του λογισμού μεταβολών είναι η διαφορική εξίσωση Euler-Lagrange. Μία πρώτη προσέγγιση αυτής της εξίσωσης δίνει την εντύπωση ότι πρόκειται περί μαθηματικού τεχνάσματος. Η παρούσα ανάλυση έχει σκοπό να αναδείξει το βάθος αυτής της εξίσωσης μέσω της ισοδυναμίας προβλημάτων. Η παρουσίαση του λογισμού μεταβολών ως ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση της λύσης μίας συναρτησιακής εξίσωσης είναι φυσιολογική. Έχει όμως και πιο βαθιές επιπτώσεις στη μεθοδολογία επίλυσης ενός δεδομένου προβλήματος.

Έστω μία συνάρτηση: $F(y,\frac{dy}{dx},x)$ και το ολοκλήρωμα

$$I=\int_a^b F\left(y,\frac{dy}{dx},x\right)dx=I\left[y(x)\right]$$

Ο σκοπός μας είναι η εύρεση της $y(x)$ έτσι ώστε το ολοκλήρωμα I να έχει κάποια ιδιότητα βελτιστοποίησης. Με άλλα λόγια, θέλουμε το εξής νοητικό σχήμα. Εάν αντικαταστήσουμε τη συνάρτηση $y(x)$ με τη συνάρτηση $y(x)+\xi(x)$, τότε το ολοκλήρωμα θα παραμείνει αναλλοίωτο σε σχέση με τη $\xi(x)$ αν είναι αρκετά μικρή. Αν θεωρήσουμε το ίδιο πρόβλημα μέσω της μεθόδου των αναπτυγμάτων, τότε μπορούμε να εξετάσουμε τον εξής μετασχηματισμό: $y(x)\rightarrow y(x)+\alpha\eta(x)$

όπου α είναι μικρή και η(x) τυχαία.

Η ιδιότητά μας εκφράζεται ως εξής:

$$\left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=0$$

για κάθε η(x).

Με άλλα λόγια, κάναμε χρήση του θεωρήματος του Weierstrass όσον αφορά στη συνέχεια και του θεωρήματος του Fermat όσον αφορά στην παραγώγιση. Αυτές οι διευκρινίσεις θα έχουν μεγαλύτερη σημασία μέσα στο πλαίσιο του Καραθεοδωρή.

Οι γραμμικές ιδιότητες του ολοκληρώματος μάς δίνουν το εξής αποτέλεσμα:

$$I(\alpha)=\int_a^b F\left(y+\alpha\eta,y'+\kappa\eta',x\right)dx$$

$$I(\alpha)=I(0)+\alpha\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right)dx+\mathrm{O}\left(\alpha^2\right)$$

Κατά συνέπεια απαιτούμε το εξής:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' \right) dx = 0$$

Για να έχουμε μία συνέχεια στα σταθερά σημεία που αποτελούν και τα όρια του ολοκληρώματος, θέτουμε ότι $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Συνεπώς, η μερική ολοκλήρωση της εξίσωσης δίνει το εξής αποτέλεσμα:

$$\left[\eta \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_a^b + \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y} \right) \eta dx = 0$$

Όπως το πρώτο σκέλος μηδενίζεται και θέλουμε για το δεύτερο ένα αποτέλεσμα που είναι ανεξάρτητο από τη η(x), έχουμε κατά συνέπεια:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Αυτή είναι η εξίσωση Euler-Lagrange. Και μέσω του υπολογισμού μας, αποδείξαμε στην ουσία ότι ισοδυναμεί με το αρχικό πρόβλημα. Αυτό το πρόβλημα ισχύει σε γενικό πλαίσιο. Αυτή η μέθοδος μάς επιτρέπει να αναλύσουμε αποτελεσματικά το περιεχόμενο της αλληλογραφίας Καραθεοδωρή-Einstein, τουλάχιστον στο τεχνικό σημείο που αφορά το φορμαλισμό του Hamilton, εφόσον η αρχή μεταβολής του Hamilton $\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$ ισοδυναμεί με τις εξισώσεις του Lagrange όσον αφορά στην κίνηση

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

όπου ο τελεστής L του Lagrange είναι συνάρτηση των συντεταγμένων q_i, των ταχυτήτων $\dot{q}_i$ και του χρόνου, έχει τη μορφή της εξίσωσης Euler-Lagrange.