La brachistochrone de Bernouilli ou les prémices du calcul de variations

N.Lygeros

La brachistochrone de Bernouilli constitue un exemple légendaire dans l'histoire des mathématiques. Elle a une préhistoire puisqu'elle avait déjà été étudiée par Galilée. Ce dernier avait montré que l'arc de cercle prenait mois de temps à être parcouru que le segment de la droite. Mais c'est à Johann Bernouilli que nous devons la solution de la cycloïde. Le défi posé par ce chercheur poursuivait la grande tradition des défis de Pascal et de Fermat. Proposé en tant que défi en 1696, le problème de la brachistochrone a été résolu par Jacob Bernouilli, Guillaume de l'Hôpital, Gottfried von Leibniz et Isaac Newton. Il va donner naissance à ce que nous nommons le calcul des variations. L'énoncé du problème est simple. Il s'agit de minimiser le temps de parcours d'une courbe pour aller d'un point A à un point B en subissant la loi de la gravité. Nous avons donc les données suivantes :

$v = \frac{ds}{dt}$ (vitesse) ou de manière équivalente : $dt = \frac{ds}{v}$.

Donc le temps se calcule à partir de l'intégrale : $t = \int_A^B \frac{ds}{v}$.

Comme l'élément de longueur du chemin s'exprime par :

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

et la conservation de l'énergie nous impose : $v = \sqrt{2gy}$

nous avons : $t = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}\,dx$

Ce qui est remarquable, c'est que l'intégrale ne contient pas de x.
Il s'agit donc d'un cas particulier de résolution de l'équation Euler-Lagrange. Sans tenir compte du facteur $\sqrt{2g}$, qui ne modifie en rien la courbe, solution du problème, nous posons

$$F = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}$$

Comme nous avons $\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$. Nous devons résoudre une équation différentielle de premier ordre. Ceci explique entre autres, la nécessité éprouvée par Constantin Carathéodory de traiter ces cas dans son livre sur le calcul des variations.

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{constante}$$

Cela implique :

$y\left(1 + y'^2\right) = C$

En posant $y' = \text{cotan}\,\theta$, nous obtenons l'équation :

$y = \frac{C}{1 + y'^2} = C\sin^2\theta = \frac{C}{2}\left(1 - \cos 2\theta\right)$.

Nous en déduisons donc que: $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{y'}\frac{dy}{d\theta} = C\tan\theta\sin 2\theta$

ainsi : $\frac{dx}{d\theta} = C(1 - \cos 2\theta)$

L'intégration de cette équation nous donne : $x = \frac{C}{2}(2\theta - \sin 2\theta)$.

En choisissant comme point d'origine $x = y = 0$ où $\theta = 0$
et en posant $C = 2A$ ainsi que $2\theta = \varphi$ pour l'élégance du résultat final, nous savons :
$x = A(\varphi - \sin\varphi)$ et $y = A(1 - \cos\varphi)$.

Et ce sont les équations paramétriques d'une cycloïde. Ainsi la solution du défi de Johann Bernouilli n'est autre que la cycloïde qui constitue le plus célèbre défi de Pascal. La brachistochrone représente donc tout un univers de la physique mathématique qui nous touche aussi bien sur le plan mathématique que cognitif, et il est de plus imprégné d'histoire et de philosophie. Elle avait donc tous les ingrédients nécessaires pour devenir une légende.