Μια γενίκευση της εξίσωσης Euler – Lagrange

Ν. Λυγερός

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τις δυνατότητες του λογισμού μεταβολών, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε τις επινοήσεις του. Η εξίσωση Euler – Lagrange δεν είναι μόνο αποτελεσματική ως γνωστικό τέχνασμα αλλά και ως στίγμα μεθοδολογίας. Για να αναδείξουμε αυτήν την δυνατότητα αρκεί να εξετάσουμε μια γενίκευση που ενσωματώνει παραγώγους υψηλότερων βαθμών. Έστω $I\left[y(x)\right]=\int_a^b F(y,y',y'',x)dx$

έχουμε: $I(\alpha)=\int_a^b F(y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta', y''+\alpha\eta'', x)dx$

$$I(\alpha)=I(0)+a\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'+\frac{\partial F}{\partial y''}\eta''\right)dx+\mathrm{O}(\alpha^2)$$

Άρα η επίλυση του αρχικού υπολογισμού ισοδυναμεί με το μηδενισμό του ολοκληρώματος: $\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'+\frac{\partial F}{\partial y''}\eta''\right)dx=0$

Η μερική ολοκλήρωση του δεύτερου σκέλους δίνει το εξής αποτέλεσμα:

$\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y'}\eta' dx=\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\right]_a^b-\int_a^b\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta dx$ όπως $\eta(a)=\eta(b)=0$ έχουμε:

$$\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y'}\eta' dx=-\int_a^b\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\right)dx$$

Η διπλή μερική ολοκλήρωση του τρίτου σκέλους δίνει το εξής αποτέλεσμα:

$$\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y''}\eta'' dx=\left[\frac{\partial F}{\partial y''}\eta'\right]_a^b-\int_a^b\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\eta' dx$$

και $\int_a^b\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\eta' dx=\left[\frac{\partial F}{\partial y''}\eta\right]_a^b-\int_a^b\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\eta dx$

όπως $\eta'(\alpha)=\eta'(b)=0$

Έχουμε: $\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y''}\eta'' dx=\int_a^b\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)dx$

Επομένως: $\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y}\eta'+\frac{\partial F}{\partial y''}\eta''\right)dx=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\right)dx$

Όπου το ολοκλήρωμα μηδενίζεται για οποιαδήποτε συνάρτηση η σημαίνει ότι:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)=0$$

Αυτή η ποσότητα γενικεύει την εξίσωση Euler – Lagrange. Και μπορούμε να την εκφράσουμε ως παράγωγου λογισμών μεταβολών

$$\frac{\delta F}{\delta y}=\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''}$$

Τώρα είναι δυνατόν να αντιληφθούμε ότι πρόκειται για μια μεθοδολογία που μπορεί να γενικευτεί και πάλι σε οποιοδήποτε βαθμό. Κατά συνέπεια η εξίσωση Euler – Lagrange αποτελεί ένα βαθύτερο νοητικό σχήμα του λογισμού μεταβολών και δεν πρόκειται μόνο για ένα εξελιγμένο εργαλείο του Lagrange για να απλοποιήσει δραστικά τους υπολογισμούς του Euler. Με ανάλογο τρόπο θα μπορούσαμε να γενικεύσουμε την εξίσωση Euler – Lagrange και για πολλές μεταβλητές. Έστω:

$$I\left[f(x,y)\right]=\iint_G F(f,f_x,f_y,x,y)dxdy$$

Τότε η συνθήκη του λογισμού μεταβολών ισοδυναμεί με την εξίσωση

$$\frac{\delta F}{\delta f}=\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f_x}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f_y}=0$$