Κρισιμότητα και ελαχιστοποίηση

Ν. Λυγερός

Η έννοια της κρισιμότητας στη φυσικά συνδέεται συχνά με αυτή της ελαχιστοποίησης στα μαθηματικά. Ας εξετάσουμε, λοιπόν, ένα πρακτικό παράδειγμα, για να αναδείξουμε αυτό το νοητικό σχήμα.

Έστω η εξίσωση $\nabla^2 n + \lambda n = \dfrac{\partial n}{\partial t}$

Το πρόβλημα είναι η εύρεση του ελάχιστου κρίσιμου όγκου ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με ακμές a, b, c, όταν ξέρουμε ότι η αστάθεια του συστήματος βρίσκεται σε φάση όπου $n \sim e^{t/T}$.
Η μέθοδος του χωρισμού μεταβλητών οδηγεί σε λύσεις μορφής $n(\mathbf{x},t) = n_0(x,y,z)e^{-k^2 t}$. Όπως η συνάρτηση n_0 ικανοποιεί την αρχική εξίσωση, βρίσκουμε

$$n(\mathbf{x}) = \sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{l\pi z}{c} \qquad k,m,l = 1,2,\ldots.$$

Με τον τελεστή του Laplace έχουμε

$$\nabla^2 n(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)n(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial n(\mathbf{x})}{\partial x} = \frac{k\pi}{a}.\cos\frac{k\pi x}{a}.\sin\frac{m\pi y}{b}.\sin\frac{l\pi z}{c}$$

$$\frac{\partial^2 n(\mathbf{x})}{\partial x^2} = -\frac{k^2\pi^2}{a^2}.\sin\frac{k\pi x}{a}.\sin\frac{m\pi y}{b}.\sin\frac{l\pi z}{c}$$

Μέσω της κυκλικής συμμετρίας έχουμε τον ίδιο τύπο για y και z.
Άρα:

$$\nabla^2 n(\mathbf{x}) = -\pi^2\left(\frac{k^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{l^2}{c^2}\right)n(\mathbf{x})$$

Η αρχική εξίσωση μετατρέπεται ως εξής:

$$\left(k_{k,m,l}^2+\lambda\right)n(\mathbf{x}) - \pi^2\left(\frac{k^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{l^2}{c^2}\right)n(\mathbf{x}) = 0$$

Πράγμα που σημαίνει ότι:

$$k_{k,m,l}^2 = \pi^2\left(\frac{k^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{l^2}{c^2}\right)-\lambda$$

Όπως $k_{k,m,l}^2$ πρέπει να είναι θετικό για όλες τις τιμές των φυσικών k, m, l, αρκεί να ισχύει για το ελάχιστο, δηλαδή k=m=l=1. Κατά συνέπεια, για τις κρίσιμες τιμές των a, b, c έχουμε:

$$\lambda = \pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

Όταν το λ είναι σταθερό, αυτή η εξίσωση ορίζει μια επιφάνεια στο χώρο των a, b, c. Το αρχικό πρόβλημα μετατρέπεται ως εξής:
Για ποιες τιμές των a, b, c ο όγκος V=abc ελαχιστοποιείται.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$V^* = abc + \mu\left[\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\right]$$

Όπου μ είναι ο πολλαπλασιαστής του Lagrange.
Όπως:

$$dV^* = \frac{\partial V^*}{\partial a}da + \frac{\partial V^*}{\partial b}db + \frac{\partial V^*}{\partial c}dc$$

Για να έχουμε:

$dV^* = 0$, θέτουμε $\quad \dfrac{\partial V^*}{\partial a} = \dfrac{\partial V^*}{\partial b} = \dfrac{\partial V^*}{\partial c} = 0$

Ο υπολογισμός των μερικών παραγώγων δίνει:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V^*}{\partial a} = bc + \mu\pi^2\left(\dfrac{-2}{a^3}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial V^*}{\partial b} = ac + \mu\pi^2\left(\dfrac{-2}{b^3}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial V^*}{\partial c} = ab + \mu\pi^2\left(\dfrac{-2}{c^3}\right) = 0 \end{cases}$$

$$bc = \frac{2\mu\pi^2}{a^3}, ac = \frac{2\mu\pi^2}{b^3} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; ab = \frac{2\mu\pi^2}{c^3}$$

Άρα:

$$abc = \frac{2\mu\pi^2}{a^3} = \frac{2\mu\pi^2}{b^3} = \frac{2\mu\pi^2}{c^3}$$

Συνεπώς: a=b=c

Όπως στις κρίσιμες τιμές έχουμε:

$$\lambda = \pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

$$\lambda = \pi^2\frac{3}{a^2}$$

Άρα:

$$a = b = c = \frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{\lambda}}$$

Κατά συνέπεια, ο ελάχιστος όγκος είναι:

$$V = abc = \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)^3 = \frac{3.\sqrt{3}\pi^3}{\lambda\sqrt{\lambda}}$$

Και ο πολλαπλασιασμός του Lagrange ισούται με:

$$\mu = \frac{V}{2\pi^2} a^2 = \frac{V}{2\cancel{\pi}^2} \frac{3.\cancel{\pi}^2}{\lambda} = \frac{3V}{2\lambda} = \frac{3}{2} \frac{3.\sqrt{3}\pi^3}{\lambda\sqrt{\lambda}} = \left(\frac{3}{\lambda}\right)^{5/2} \frac{\pi^3}{2}$$