Υπολογισμοί με spin=1/2

Ν. Λυγερός

$$\left[J_x, J_y\right] = iJ_z, \left[J_y, J_z\right] = iJ_x, \left[J_z, J_x\right] = iJ_y$$

$$J^2 = (\overrightarrow{J_1} + \overrightarrow{J_2})^2 = J_1^2 + J_2^2 + 2\overrightarrow{J_1}.\overrightarrow{J_2}$$

$$\vec{J}.\overrightarrow{J_1} = \left(\overrightarrow{J_1} + \overrightarrow{J_2}\right).\overrightarrow{J_1} = J_1^2 + \overrightarrow{J_2}.\overrightarrow{J_1} = \frac{1}{2}\left(J^2 + J_1^2 - J_2^2\right)$$

$$\vec{J}.\overrightarrow{J_2} = \left(\overrightarrow{J_1} + \overrightarrow{J_2}\right).\overrightarrow{J_2} = J_2^2 + \overrightarrow{J_1}.\overrightarrow{J_2} = \frac{1}{2}\left(J^2 + J_2^2 - J_1^2\right)$$

$$\left\langle \vec{J}.\overrightarrow{J_1} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(J\left(J+1\right) + J_1\left(J_1+1\right) - J_2\left(J_2+1\right)\right)\hbar^2$$

$$\left\langle \vec{J}.\overrightarrow{J_2} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(J\left(J+1\right) + J_2\left(J_2+1\right) - J_1\left(J_1+1\right)\right)\hbar^2$$

Έστω δύο σωματίδια με $spin = 1/2$. Με spin up$\uparrow$ και spin down $\downarrow$, έχουμε 4 δυνατότητες $\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow, \downarrow\downarrow$. Έστω: $S \equiv S^{(1)} + S^{(2)}$. Στη συντεταγμένη z θα έχουμε:

$$S_z\chi_1\chi_2 = \left(S_z^{(1)} + S_z^{(2)}\right)\chi_1\chi_2 = \left(S_z^{(1)}\chi_1\right)\chi_2 + \chi_1\left(S_z^{(2)}\right)\chi_2$$

$$S_z\chi_1\chi_2 = \left(\hbar m_1\chi_1\right)\chi_2 + \chi_1\left(\hbar m_2\chi_2\right) = \hbar\left(m_1 + m_2\right)\chi_1\chi_2$$

Διότι $S^{(1)}$ δρα μόνο πάνω στο χ_1 και $S^{(2)}$ στο χ_2.

Έτσι έχουμε για $m = m_1 + m_2$

$\uparrow\uparrow: m = 1, \quad \uparrow\downarrow: m = 0 \quad \downarrow\uparrow: m = 0, \quad \downarrow\downarrow: m = -1$

Το πρόβλημα είναι διπλή τιμή $m = 0$. Ενώ έχουμε ένα S που δείχνει να είναι s=1, πρέπει πρώτα να κατανοήσουμε τη διπλή τιμή. Ένας τρόπος κλασικός για αυτήν τη δυσκολία είναι η χρήση του τελεστή $S_- = S_-^{(1)} + S_-^{(2)}$ στο $\uparrow\uparrow$. Όπου $S_- = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Έχουμε λοιπόν:

$$S_-\left(\uparrow\uparrow\right) = \left(S_-^{(1)}\uparrow\right)\uparrow + \uparrow\left(S_-^{(2)}\uparrow\right)$$

$$S_-\left(\uparrow\uparrow\right) = \left(\hbar\downarrow\right)\uparrow + \uparrow.\left(\hbar\downarrow\right) = \hbar\left(\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\right)$$

Κατά συνέπεια για s=1 έχουμε:

$$\left|11\right\rangle = \uparrow\uparrow, \ \left|10\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\right), \quad \left|1-1\right\rangle = \downarrow\downarrow$$

Και για την ορθογώνια κατάσταση έχουμε: $\left|00\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\right)$.

Ο συνδυασμός των δύο σωματιδίων με $spin=\frac{1}{2}$ μπορεί να δημιουργήσει $spin=0$ και $spin=1$, εξαρτάται αν βρίσκεται στη μοναδική ή στην τριπλή κατάσταση. Η απόδειξη του ισχυρισμού προέρχεται από τα ιδιοδιανύσματα του S^2. Με φορμαλισμό της εισαγωγής έχουμε:

$$S^2=\left(\overrightarrow{S^{(1)}}+\overrightarrow{S^{(2)}}\right)\left(\overrightarrow{S^{(1)}}+\overrightarrow{S^{(2)}}\right)=\left(\overrightarrow{S^{(1)}}\right)^2+\left(\overrightarrow{S^{(2)}}\right)^2+2\overrightarrow{S^{(2)}}\overrightarrow{S^{(1)}}$$

Όπως: $S^{(1)}S^{(2)}(\uparrow\downarrow)=\left(S_x^{(1)}\uparrow\right)\left(S_x^{(2)}\downarrow\right)+\left(S_y^{(1)}\uparrow\right)\left(S_y^{(2)}\downarrow\right)+\left(S_z^{(1)}\uparrow\right)\left(S_z^{(2)}\downarrow\right)$

$$S^{(1)}S^{(2)}(\uparrow\downarrow)=\left(\frac{\hbar}{2}\downarrow\right)\left(\frac{\hbar}{2}\uparrow\right)+\left(\frac{i\hbar}{2}\downarrow\right)\left(\frac{-i\hbar}{2}\uparrow\right)+\left(\frac{\hbar}{2}\uparrow\right)\left(-\frac{\hbar}{2}\downarrow\right)=\frac{\hbar^2}{4}(2\downarrow\uparrow-\uparrow\downarrow)$$

Ανάλογα έχουμε: $S^{(1)}S^{(2)}(\downarrow\uparrow)=\frac{\hbar^2}{4}(2\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow)$

Έτσι: $S^{(1)}S^{(2)}\left|10\right\rangle=\frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}(2\downarrow\uparrow-\uparrow\downarrow+2\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow)=\frac{\hbar^2}{4}\left|10\right\rangle$

Και: $S^{(1)}S^{(2)}\left|00\right\rangle=\frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}(2\downarrow\uparrow-\uparrow\downarrow-2\uparrow\downarrow+\downarrow\uparrow)=-\frac{3\hbar^2}{4}\left|00\right\rangle$

Συνεπώς έχουμε: $S^2\left|10\right\rangle=\left(\frac{3\hbar^2}{4}+\frac{3\hbar^2}{4}+2\frac{\hbar^2}{4}\right)\left|10\right\rangle=2\hbar^2\left|10\right\rangle$

Και $S^2\left|00\right\rangle=\left(\frac{3\hbar^2}{4}+\frac{3\hbar^2}{4}-2\frac{3\hbar^2}{4}\right)\left|00\right\rangle=0$

Ο υπολογισμός γίνεται ανάλογα με |11> και |1-1>

Η γενίκευση αυτής της προσέγγισης γίνεται με τους συντελεστές Clebsch- Gordan. Έτσι η κατάσταση $\left|sm\right\rangle$ με $spin=s$ και με z-συντεταγμένη = m, είναι γραμμικός συνδυασμός των

καταστάσεων $\left|s_1m_1\right\rangle\left|s_2m_2\right\rangle$: $\left|sm\right\rangle=\sum_{m_1+m_2=m}C_{m_1}^{s_1}C_{m_2m}^{s_2s}\left|s_1m_1\right\rangle\left|s_2m_2\right\rangle$

αυτό γίνεται μέσω των εφαρμογών στη κβαντική θεωρία της θεωρίας ομάδων. Στην πραγματικότητα, με το φορμαλισμό πινάκων του Heisenberg και η εμβάθυνση του Pauli είναι αναμενόμενο να βρίσκουμε μία δράση της θεωρίας του Galois. Οι υπολογισμοί μας είναι μια ειδική περίπτωση γινομένου παραστάσεων της ομάδας περιστροφών, πράγμα το οποίο είναι φυσιολογική, εφόσον το πρόβλημα μας αφορά αποκλειστικά το $spin$.