Περί συντελεστών Clebsch-Gordan

Ν. Λυγερός

Ιδιοκαταστάσεις του πλήρους συνόλου μετατιθεμένων $\{J_1^2, J_2^2, J_{1z}, J_{2z}\}$ φυσικών μεγεθών ως $\left| j_1 j_2 m_1 m_2 \right\rangle$.

$J_1^2 \left| j_1 j_2 m_1 m_2 \right\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1) \left| j_1 j_2 m_1 m_2 \right\rangle$

$J_{1z} \left| j_1 j_2 m_1 m_2 \right\rangle = \hbar m_1 \left| j_1 j_2 m_1 m_2 \right\rangle$

$J_2^2 \left| j_1 j_2 m_1 m_2 \right\rangle = \hbar^2 j_2(j_2+1) \left| j_1 j_2 m_1 m_2 \right\rangle$

$J_{2z} \left| j_1 j_2 m_1 m_2 \right\rangle = \hbar m_2 \left| j_1 j_2 m_1 m_2 \right\rangle$

Όπως $\left[\vec{J}, J_1^2\right] = \left[\vec{J}, J_2^2\right] = 0$ και το σύνολο $\{J^2, J_z, J_1^2, J_2^2\}$

Είναι πλήρες κι έχουμε: $J^2 \left| j_1 j_2 m \right\rangle = \hbar^2 j(j+1) \left| j_1 j_2 m \right\rangle$,

$J_z \left| j_1 j_2 m \right\rangle = \hbar m \left| j_1 j_2 m \right\rangle$

Ο μετασχηματισμός που συνδέει τη βάση $\left| j_1 j_2 m \right\rangle$ με τη βάση $\left| j_1 j_2 m_1 m_2 \right\rangle$ είναι ο εξής:

$$\left| j_1 j_2 m \right\rangle = \sum_{j_1, j_2} \sum_{m_1, m_2} \left| j_1, j_2, m_1 m_2 \right\rangle \left\langle j_1, j_2, m_1 m_2 \right| j_1 j_2 jm \rangle$$

Οι συντελεστές $\left\langle j_1, j_2, m_1 m_2 \right| j_1 j_2 jm \rangle$ που καθορίζουν τη μετάβαση είναι συντελεστές Clebsch-Gordan ή συντελεστές Wigner.

Όπως μηδενίζεται για $m_1 m_2 \neq m$ και $j_1 \neq j_2$, το ανάπτυγμα είναι:

$$\left| j_1 j_2 jm \right\rangle = \sum_{m_1 m_2 m} \left| j_1 j_2 m_1 m_2 \right\rangle \left\langle j_1 j_2 m_1 m_2 \right| j_1 j_2 jm \rangle$$

Για να τους προσδιορίσουμε χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των τελεστών $J \pm$

$$J \pm \left| j_1 j_2 jm >= \hbar \{ j(j+1) - m(m \pm 1) \}^{1/2} \right| \left| j_1 j_2 j, m \pm 1 \right\rangle$$

$$J_{k\pm} \left| j_1 j_2 m_1 m_2 >= \hbar \left\{ j_k(j_k+1) - m_k(m_k \pm 1) \right\}^{1/2} \right| \left| j_1 j_2 m_1 \pm \delta_{k1}, m_2 \pm \delta_{k2} \right\rangle \text{ για } k = 1,2 .$$

$$\left\langle j_1 j_2 m_1 m_2 \right| J \pm \left| j_1 j_2 jm \right\rangle = \hbar \{ j(j+1) - m(m \pm 1) \}^{1/2} \left\langle j_1 j_2 m_1 m_2 \right| j_1 j_2 j, m \pm 1 \rangle$$

$$= \left\langle j_1 j_2 m_1 m_2 \right| \left(J_{1\pm} + J_{2\pm} \right) \left| j_1 j_2 jm \right\rangle$$

$$= \hbar \{ j_1(j_1+1) - m_1(m_1 \mp 1) \}^{1/2} \left\langle \right| j_1 j_2, m_1 \mp 1, m_2 \left| j_1 j_2 jm \right\rangle +$$

$$\hbar \{ j_2(j_2+1) - m_2(m_2 \mp 1) \}^{1/2} \left\langle j_1 j_2 m_1, m_2 \mp 1 \right| j_1 j_2 jm \rangle$$

Επομένως: $\left\langle j_1 j_2 m_1 m_2 \right| j_1 j_2 j, m \pm 1 \rangle = \dfrac{\{ j_1(j_1+1) - m_1(m_1 \mp 1) \}^{1/2}}{\{ j(j+1) - m(m \pm 1) \}^{1/2}} \left\langle j_1 j_2, m_1 \mp 1, m_2 \right| j_1 j_2 jm \rangle +$

$$\frac{\{ j_2(j_2+1) - m_2(m_2 \mp 1) \}^{1/2}}{\{ j(j+1) - m(m \pm 1) \}^{1/2}} \left\langle j_1 j_2 m_1, m_2 \mp 1 \right| j_1 j_2 jm \rangle$$