Γωνίες του Euler και εφαρμογές
Ν. Λυγερός

Έστω ο πίνακας μετασχηματισμού περιστροφής με γωνίες α, β, γ του Euler

$$R(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix}\cos\gamma\cos\beta\cos\alpha-\sin\gamma\sin\alpha & -\sin\gamma\cos\beta\cos\alpha-\cos\gamma\sin\alpha & \sin\beta\cos\alpha\\ \cos\gamma\cos\beta\sin\alpha+\sin\gamma\cos\alpha & \sin\gamma\cos\beta\sin\alpha+\cos\gamma\cos\alpha & \sin\beta\sin\alpha\\ -\cos\gamma\sin\beta & \sin\gamma\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$$

$V_i^{'}=R_{ij}V_j$

Όπου R_{ij} είναι τα στοιχεία του πίνακα περιστροφής.

$A_j=R_{ij}a_i \qquad R_{ij}=a_i.A_j$

Ιδιότητες του πίνακα $R:R^*=R,\ \ \tilde{R}=R^{-1},\det R=1$

$\Delta\ \ \kappa\alpha\iota\ \ 1>\rightarrow\Delta 1>$ Ανάλογα $Q\rightarrow\Delta Q\Delta^{-1}$

Έστω $J\equiv(J_x,J_y,J_z)$ και $J_i\equiv J.a_i$

$J_i^{'}=\Delta J_i\Delta^{-1}=J.A_i=JR_{ji}$ (και όχι R_{ij})

$J_i^{'}=\Delta J_i\Delta^{-1}=J.A_i=J_jR$

$J_z^{'}=J_zR_{zi}=\sin b\cos aJ_x+\sin\beta\sin\alpha.J_y+\cos\beta J_z$

$J_z^{'}=\sin b\left(\cos aJ_x+\sin\alpha J_y\right)+\cos\beta J_z$

Όπως $J_+=J_x+J_y$ και $J_-=J_x-iJ_y$

$J_x=\dfrac{J_+-iJ_-}{1-i}\quad J_y=\dfrac{J_+-J_-}{1+i}$

Άρα $J_z^{'}=\sin b\left(\cos a\left(\dfrac{J_+-iJ_-}{1-i}\right)+\sin a\left(\dfrac{J_+-J_-}{1+i}\right)\right)+\cos\beta.J_z$

$J_z^{'}=\sin b\left(e^{-i\alpha}J_++e^{-i\alpha}J_-\right)+\cos\beta.J_z$

$J_y^{'}=(-\sin\gamma\cos\beta\cos\alpha-\cos\gamma\sin\alpha)J_x+(\sin\gamma\cos\beta\sin\alpha-\cos\gamma\cos\alpha)J_y+\sin\gamma\sin\beta J_z$

$J_y^{'}=(-\sin\gamma\cos\beta\cos\alpha-\cos\gamma\sin\alpha)\left(\dfrac{J_+-iJ_-}{1-i}\right)-(\sin\gamma\cos\beta\sin\alpha-\cos\gamma\cos\alpha)\left(\dfrac{J_+-J_-}{1+i}\right)+\sin\gamma\sin\beta J_z$

$J_x^{'}=(\cos\gamma\cos\beta\cos\alpha-\sin\gamma\sin\alpha)J_x+(\cos\gamma\cos\beta\sin\alpha+\sin\gamma\cos\alpha)J_y-\cos\gamma\sin\beta J_z$

$J_x^{'}=(\cos\gamma\cos\beta\cos\alpha-\sin\gamma\sin\alpha)\left(\dfrac{J_+-iJ_-}{1-i}\right)+(\cos\gamma\cos\beta\sin\alpha+\sin\gamma\cos\alpha)\left(\dfrac{J_+-J_-}{1+i}\right)-\cos\gamma\sin\beta J_z$

Άρα: $J_+^{'}=e^{-i\gamma}\left[\dfrac{1+\cos\beta}{2}e^{-i\alpha}J_+-\dfrac{1-\cos\beta}{2}e^{i\alpha}J_--\sin\beta J_z\right]$

$J_-^{'}=e^{i\gamma}\left[\dfrac{1+\cos\beta}{2}e^{i\alpha}J_+-\dfrac{1-\cos\beta}{2}e^{-i\alpha}J_--\sin\beta J_z\right]$

Κατά συνέπεια: $J_\pm^{'}=e^{\mp i\gamma}\left[\dfrac{1+\cos\beta}{2}e^{\mp i\alpha}J_\pm-\dfrac{1-\cos\beta}{2}e^{\pm i\alpha}J_\mp-\sin\beta J_z\right]$