Το λήμμα του Carr στο έργο του Ramanujan

Ν.Λυγερός

Στο έργο του Ramanujan υπάρχουν πολλές έμμεσες αναφορές στο λήμμα του Carr. Όπως αυτό το λήμμα χρησιμοποιεί μόνο και μόνο στοιχειώδη μαθηματικά θεωρούμε ότι είναι χρήσιμο και στο ευρύτερο κοινό που θέλει ν' ασχοληθεί με τη θεωρία αριθμών. Επιτρέπει, επιπλέον, στους ειδικούς να απλοποιήσουμε μερικά βήματα του Ramanujan στις ελλειπτικές αποδείξεις.

Λήμμα του Carr

Έστω $c=(a^2-b^2)^{1/3}$. Έχουμε τα εξής:

$$(a+\sqrt{b})^{1/3}=x+\sqrt{y}$$

Όπου $4x^3-3cx=a$

Και $y=x^2-c$

Απόδειξη: Έστω $(a+\sqrt{b})^{1/3}=x+\sqrt{y}$

$$\frac{(a-\sqrt{b})^{1/3}}{c}=\frac{x-\sqrt{y}}{x^2-y}$$

Έστω: $c=x^2-y$

Έχουμε: $(a-\sqrt{b})^{1/3}=x-\sqrt{y}$

Άρα $\left(\left(a+\sqrt{b}\right)^{1/3}\right)^3=\left(x+\sqrt{y}\right)^3=a+\sqrt{b}$

Και $\left(\left(a-\sqrt{b}\right)^{1/3}\right)^3=\left(x-\sqrt{y}\right)^3=a-\sqrt{b}$

$$a+\sqrt{b}=x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+\sqrt{y}y^2$$

$$a-\sqrt{b}=x^3-3x^2\sqrt{y}+3xy-\sqrt{y}y^2$$

Συνεπώς: $(a+\sqrt{b})+(a-\sqrt{b})=2x^3+6xy=2a$

Άρα: $a=4x^3+3xy$

Όπως: $y = x^2 - c$

Συμπεραίνουμε ότι: $a = x^3 + 3x(x^2 - c)$

Δηλαδή: $a = 4x^3 - 3cx$